数理科学　（文系）
１０月８日７２２教室　１４：４０－１６：１０
この講義の目的：
今日の話：

1. 数と量について

1.
数を数える。１、２、３、４、５、６、７、８、９、…
数の数え方は、親が子供に教える事柄。
繰り返すうちに、「数はいくらでも数えられる」ことがわかる（らしい）。
一人っ子、多数の子供においての認識の差はあるかもしれない。
分配、順番において非常に基本的なものだ。

2. 量をとらえる。量は測られたものである。測量、重量、量目
数えられる量：１個、２個、３個、４個、…　個数　（個数の比較は比較的簡単？である）
測る量：長さ、面積、体積、重量、時間、速さ、…　連続量
計算する量：密度、肥満度、

3. ものさし、はかりは、単位によって、連続量を個数（の列）に置き換える道具である。
現在、日本で使う単位系は、「メートル、キログラム、秒」あるいは、「センチメートル、グラム、秒」　である。
通常、単位の１０分の１、１００分の１、１０００分の１、…デシ、センチ、ミリ、…１０倍、１００倍、１０００倍デカ、ヘクト、キロ、…が用意されている.
近似的に、１メートル７４センチ３ミリ　くらいということで納得する。

4. ギリシャの数学：論理的な考え方を導入した。ユークリッド「原論」
幾何学の書であるが、幾何学から量を規定しようとしたものである.

5. 線分の長さを整数倍した長さが存在することは、公理のうちの１つと考えられる.
また、幾何学の公理から、線分を同じ長さの線分に分割する方法を与えた.

6. 単位の長さを決めることは、為政者の権限の１つであった.
日本でも、「太閤検地」において、長さを正確に測って、田畑の面積を定め、辺の長さの和は同じでもより立方体に近い「太閤升」を用いて、より多くの年貢を取り立てようとした.

７．単位の長さが定まると、その何倍か、その１０分の１の何倍か、その１００分の１の何倍かという順に測っていくと、長さが定まる．

ギリシアの数学では、この過程の、哲学的意味付けを与えようとした。

８．それは、２つの線分の長さの比というものが存在する。という考え方である．

その前に、長さが等しくない線分の長さは、一方が長いか、短いかである。

９．$AB > A'B'$ とは、線分 AB の中に $A'B'$ を取れるという意味である．

$=, >, <$ のどれかが成立するという公理は、

$AB > A'B' > A"B"$ ならば　$AB > A"B"$ という公理

直線の上に、線分と同じ長さが取れるという公理

と相俟って意味が深い。

１０．さて、２つの線分が与えられたときに、その比を求める手順はどういうものであろうか？

同じ直線上に線分を取って

$AB > A'B'$ がわかったとする．$A = A'$ にとってもよい。

このあと、$AB - AB'$ という線分 $B'B$ と $A'B'$ をくらべる．

もう一度 $B'B > A'B'$ ならば、A' を B' の場所にとって、$A'B' = B'B"$ とし

$B'B - B'B" = B"B$ を得る．再び、$B"B$ と $A'B'$ を比べる．

何回か後に、残った長さが $A'B'$ より短くなるまで続ける．

１１．ここで問題だが、必ず何回か後に「残った長さが $A'B'$ より短くなる」のであろうか？

このことを真剣に考えたギリシャの数学者は、これは公理にせざるを得ないという結論に達した。

これを「アルキメデスの公理」と呼ぶ。

「アルキメデスの公理」は通常、どのような正の数　a, b　に対しても、ある自然数 n で　$an > b$　となるものがあるという形で述べられる。

$a = AB,\ b = A'B'$ に対して、n は「残った長さが残った長さが $A'B'$ より短くなる」その次の自然数である。

１２．長さの概念がある数体で、「アルキメデスの公理」を満たさない「非アルキメデス的順序体」というものがあることが、

１９世紀頃にはわかってきた．今考えているのは、

ａ＞ｂ＞０のとき、ａ÷ｂ＝自然数　余り　ｂより小さい数　となるかということである。

ａ÷ｂがａ／ｂという数を表すことができ、その整数部分を求めているという見方は、ずっと高級であるが、「非アルキメデス的付値体」においては、ａ／ｂという数を求めることも出来、ある意味で、その

整数部分を定義することも出来るが、普通の自然数ｎに対しては、ｎａ＞ｂとならない。

１３． さて、アルキメデスの公理の下で、
$AB > A'B'$ のとき、
$AB = nA'B' + A"B"$
$A"B"$ が存在しない（＝０）となるかまたは
$A'B' > A"B"$
となる。
その場合、　$A'B' > A"B"$ に対して同様に繰り返す。

１４． 次の問題はこうして
$AB > A'B' > A"B" >$
と取られた長さが何回目かに　＝０となるかどうかである。

１５． 何回もやっていけば長さはどんどん短くなるから０になるだろう。
という文章は、どのように解釈すればよいであろうか？
可能性としては、「何回目かに＝０となる」かまたは「何回やっても＝０とならない。」のどちらも可能である。
上の場合、比は、自然数の比となる。そこでこれを有理比という。
そうでない場合があるか？すなわちそのような比が存在するか
という問題が、ギリシャの数学者達を悩ませた。