１０月２９日７２２教室　１４：４０－１６：１０
先週の復習：

1. 数と量

2. 小数

2.1.　比の理論は、面白いが、連分数展開は、計算には向かない。
（比を最も良く近似する分数などを得るためには有用である。しかし、どこまで良く近似しているかも、見た目ではわからない。）
例えば、有理数であっても、分数に書いて計算すると、掛け算割り算は良いが、足し算引き算は通分する必要がある。
連分数の逆数となる連分数は、非常に容易である。連分数の掛け算は $\sqrt{2}\sqrt{3} = \sqrt{6}$ であるが、$\sqrt{6}$ は以下の数。

$$
\begin{aligned}
\sqrt{6} = &\ 2 + (\sqrt{6}-2) = 2 + \cfrac{2}{2+\sqrt{6}} \\
= &\ 2 + \cfrac{1}{1+\cfrac{\sqrt{6}}{2}} = 2 + \cfrac{1}{1+\cfrac{2+\cfrac{2}{2+\sqrt{6}}}{2}} \\
= &\ 2 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\sqrt{6}}} \\
= &\ 2 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\sqrt{6}}}}} \\
= &\ 2 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\sqrt{6}}}}}}} \\
= &\ 2 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\cdots}}}}}}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{ContinuedFraction}[\mathrm{Sqrt}[2]+\mathrm{Sqrt}[3],100] \\
&\quad = \{3, 6, 1, 5, 7, 1, 1, 4, 1, 38, 43, 1, 3, 2, 1, 1, 1, 1, \\
&\qquad 2, 4, 1, 4, 5, 1, 5, 1, 7, 22, 2, 5, 1, 1, 2, 1, 1, 31, 2, \\
&\qquad 1, 1, 3, 1, 44, 1, 89, 1, 8, 5, 2, 5, 1, 1, 4, 2, 8, 1, 17, \\
&\qquad 1, 4, 3, 4, 3, 2, 1, 1, 4, 2, 1, 9, 1, 15, 13, 1, 39, 20, 2, \\
&\qquad 152, 3, 2, 4, 1, 30, 1, 3, 1, 2, 1, 2, 16, 3, 24, 1, 9, 1, 172, \\
&\qquad 3, 1, 1, 1, 1, 27\}
\end{aligned}
$$

2.2.　小数は、位取りと零の発見の後に得られた概念である。
１つの区間を２等分、３等分、５等分、…としていくのは、平行線を使った作図で求めることができる。
２等分は、垂直２等分線の作図でもできる。

2.3.　小数の有用性は、「大きさが感覚的にわかること（これは小数に慣れた我々だからかもしれない)、近似したときの誤差が容易に表現できることである。

　加法、減法、乗法、除法については、繰り上がり、繰り下がり等に注意すれば容易である。

2.4.　問題点。

　有理数を表すために無限小数が現れる。(比を表すことには向いていない。)

　例えば

$\frac{1}{7} = 0.142857142857\ldots$　周期　6

$\frac{1}{13} = 0.076923076923\ldots$　周期　6

$\frac{1}{17} = 0.05882352941176470588235294117647\ldots$　周期　16

$\frac{1}{19} = 0.052631578947368421052631578947368421\ldots$　周期　18

$\frac{1}{23} = 0.04347826086956521739130434782608695652173913\ldots$

周期　22

$\frac{1}{29} = 0.0344827586206896551724137931034482758620689655172413793l\ldots$

周期　28

$\frac{1}{31} = 0.032258064516129032258064516129\ldots$　周期　15

$\frac{1}{37} = 0.027027\ldots$　周期　3

$\frac{1}{43} = 0.023255813953488372093023255813953488372093\ldots$

周期　21

$$\frac{1}{47} = 0.0212765957446808510638297872340425531914893617$$
$$0212765957446808510638297872340425531914893617\ldots$$

周期　46

$\frac{1}{53} = 0.01886792452830188679245283\ldots$　周期　13

$$\frac{1}{59} = 0.0169491525423728813559322033898305084745762711864406779661$$
$$0169491525423728813559322033898305084745762711864406779661\ldots$$

周期　58

$$\frac{1}{61} = 0.016393442622950819672131147540983606557377049180327868852459$$
$$016393442622950819672131147540983606557377049180327868852459\ldots$$

周期　60

$$\frac{1}{67} = 0.0149253731343283582089552238805970$$
$$149253731343283582089552238805970\ldots$$

周期　33

$$\frac{1}{71} = 0.01408450704225352112676056338028169$$
$$01408450704225352112676056338028169\ldots$$

周期　35

$$\frac{1}{73} = 0.0136986301369863 0\ldots \quad 周期\quad 8$$

$$\frac{1}{79} = 0.0126582278481012658227848 1\ldots \quad 周期\quad 13$$

$$\frac{1}{83} = 0.01204819277108433734939759036144578313253$$
$$01204819277108433734939759036144578313253\ldots$$

周期　41

$$\frac{1}{89} = 0.01123595505617977528089887640449438202247191$$
$$01123595505617977528089887640449438202247191\ldots$$

周期　44

$$\frac{1}{97} = 0.010309278350515463917525773195876288659793814432$$
$$989690721649484536082474226804123711340206185567$$
$$010309278350515463917525773195876288659793814432$$
$$989690721649484536082474226804123711340206185567\ldots$$

周期　96

これらは素数の逆数。素数を法とする乗法群は、位数（素数－１）の巡回群。

従って、[１０倍] が、（素数－１）の巡回群でどのような位数かがわかればよい。

2.5.　連分数と小数についてまとめると

有理数は有限連分数として書かれる。

無理数は、無限連分数になってしまうもの（と定義した）。

また、

有理数は循環小数となる。

無理数は循環しない小数となる。

2.6.　循環する連分数は、２次の無理数となる。

2.7.　問題. 比があれば、連分数、小数が得られるのは良いが、連分数、小数は比を表すか？

言い換えると、比に対して、連分数、小数は一通りに定まるか？

$[0,\infty) \ni x \longmapsto (n_0, n_1, n_2, \ldots, n_k) \quad (n_k \neq 1)$

または

$[0,\infty) \ni x \longmapsto (n_0, n_1, n_2, \ldots, n_k. \ldots)$

小数

$[0,\infty) \ni x \longmapsto n_0.a_1a_2 \ldots a_k$

$[0,\infty) \ni x \longmapsto n_0.a_1a_2 \ldots a_k \ldots$

a_k は 0, …, 9.

2.8.　問

0.999999 … は現れるか？

0.999999 … は 0.9, 0.99, 0.999, 0.9999, … よりも大きく 1 よりも小さい数か？