１１月２６日７２２教室　１４：４０－１６：１０
１２月３日は休講
次回は１２月１０日、その次は１２月１７日、
１月１４日、１月２１日
先週までの復習：

1. 数と量

2. 小数

3. 無限和

3.1.　正の実数 a_k に対し、そのうちの有限個の和の全体のなす集合 A を考え、$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sup A$ としたのであった。

3.2.　$\{a_1, a_1+a_2, a_1+a_2+a_3, \dots\} = \{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i\}$ を考えると、これは単調に増加する数列である。前に与えた意味の無限和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ は $\sup\{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i\}$ と等しくなる。

その理由は、まず、

自然数の有限集合 F に対し、$\max F$ をその最大の自然数とすると、$\displaystyle\sum_{k\in F} a_k \leqq \sum_{k=1}^{\max F} a_k$ である。

従って、$\displaystyle\sum_{k\in F} a_k \leqq \sum_{k=1}^{\max F} a_k \leqq \sup\{\sum_{k=1}^{\max F} a_k\}$

ゆえに、 $\sup\{\displaystyle\sum_{k\in F} a_k\} \leqq \sup\{\sum_{k=1}^{\max F} a_k\}$ である。

逆に、$\{1, \dots, n\}$ は有限集合だから、$\sup\{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k\} \leqq \sup\{\sum_{k\in F} a_k\}$ である。

3.3.　$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sup\{\sum_{i=1}^{n} a_i\}$ という和の定義は、和をとる順序に依っていない。

従って、$\{a_k\}$ の和をとる順序を２通り考えるとそれらは等しくなる。

3.4.　上に有界でないとは、どのような m に対しても、ある並べかたに対し、$a_1 + \cdots + a_k > m$ となる。従って、どのような並べ方 $a_{\sigma(k)}$ に対しても $a_{\sigma(1)} + \cdots + a_{\sigma(n_k)} > m$ となる。

3.5.　有限個の和について、加法の可換性から、和は順序に依らない。
　無限個の和については、順序が問題になるのが普通であるが、全ての項が正の時には、順序のよらないことを上で示した。

3.6.　正実数の列の和を取るときに、アルキメデスの公理から、無限個の k に対して $a_k \geqq \varepsilon > 0$ となっていれば $\displaystyle\sum_1^\infty a_k = \infty$ である。

3.7.　従って、$\displaystyle\sum_1^\infty a_k < \infty$（収束する）ためには、どのような $\varepsilon > 0$ に対しても、$a_k \geqq \varepsilon > 0$ となる a_k は有限個であることが必要である。
　無限個の a_k の和についてどのような順序をとっても、$a_k \geqq \varepsilon > 0$ となる a_k は、n_ε より前に、現れることになる。
　任意の $\varepsilon > 0$ に対し、$k > n_\varepsilon$ ならば、$a_k \leqq \varepsilon$.
　これを、$a_k \to 0$ と書く。

3.8.　収束する正項級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^\infty a_k$ の項 a_k は、大きいものから順にならべることはできるが、小さいものから順にならべようとすると、最初が定まらない。
　無限個を並べるというとき、最初が定まり、次は、次は、$\cdots$と定まるようになっていなければならない。また、１つのものの１つ前のものは何かということも定まる必要がある。
　このような並べ方を考えているときには、奇数を最初に数えて、偶数を後で数えるというのは、許されない。しかし、これも和をとるときには正当化される。

3.9.　正項級数の和。
　$\displaystyle\sum_{k=1}^\infty a_k + \sum_{k=1}^\infty b_k = \sum_{k=1}^\infty (a_k + b_k)$
　$\displaystyle\sum_{k\in F_1} a_k + \sum_{k\in F_2} b_k \leqq \sum_{k\in F_1 \cup F_2} (a_k + b_k)$ だから、
　$\displaystyle\sum_{k\in F_1} a_k + \sum_{k\in F_2} b_k \leqq \sup \sum_{k\in F_1 \cup F_2} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^\infty (a_k + b_k)$
　従って、$\displaystyle\sum_{k=1}^\infty a_k + \sum_{k=1}^\infty b_k \leqq \sum_{k=1}^\infty (a_k + b_k)$

一方、$\sum_{k\in F} a_k+\sum_{k\in F} b_k=\sum_{k\in F}(a_k+b_k)$ だから、$\sup\sum_{k\in F} a_k+\sup\sum_{k\in F} b_k \geqq \sum_{k\in F}(a_k+b_k)$

従って、$\sum_{k=1}^{\infty} a_k+\sum_{k=1}^{\infty} b_k \geqq \sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k)$

3.10.　正項級数の積。

$(\sum_{j=1}^{\infty} a_j)(\sum_{k=1}^{\infty} b_k)=\sum a_j b_k$

後の和は (j,k) について、どのような順序で加えても良い。

$(\sum_{j\in F_1} a_j)(\sum_{k\in F_2} b_k)=\sum_{(j,k)\in F_1\times F_2} a_j b_k$ だから、

$\sup(\sum_{j\in F_1} a_j)\sup(\sum_{k\in F_2} b_k)\geqq \sum_{(j,k)\in F_1\times F_2} a_j b_k$

$F\subset \mathbf{N}\times\mathbf{N}$ に対して、$F\subset F_1\times F_2$ となる F_1, F_2 が存在するから、

このとき $\sup(\sum_{j\in F_1} a_j)\sup(\sum_{k\in F_2} b_k)\geqq \sum_{(j,k)\in F_1\times F_2} a_j b_k \geqq \sum_{(j,k)\in F} a_j b_k$

従って、$(\sum_{j=1}^{\infty} a_j)(\sum_{k=1}^{\infty} b_k)\geqq \sum a_j b_k$

$(\sum_{j\in F_1} a_j)(\sum_{k\in F_2} b_k)=\sum_{(j,k)\in F_1\times F_2} a_j b_k$ だから、$(\sum_{j\in F_1} a_j)(\sum_{k\in F_2} b_k)\leqq \sum a_j b_k$

従って、$(\sum_{j=1}^{\infty} a_j)(\sum_{k=1}^{\infty} b_k)\leqq \sum a_j b_k$

3.11.　絶対収束する級数は収束する。

$\sum a_k$ に対して、$\sum |a_k|<\infty$ が仮定である。

3.12.　a_k に対して、$k\in K_+$ ならば $a_k>0$, $k\in K_-$ ならば $a_k<0$, $k\in K_0$ ならば $a_k=0$ とする。順序のつけ方に依らず、$\sum_{k\in K_+} a_k$, $\sum_{k\in K_-}(-a_k)$, $\sum_{k\in K_0} a_k=0$ は確定するから、

$\sum a_k=\sum_{k\in K_+} a_k-\sum_{k\in K_-}(-a_k)$ と定義する（こともできる）。

3.13.　級数の収束は、部分和の列の収束と定義する（こともできる）。

列 b_N の収束は、任意の $\varepsilon>0$ に対し、$N>n_\varepsilon$ ならば、$|b_N-b_\infty|<\varepsilon$ がいえることとする。

任意の ε に対し、
$$\sum_{k\in K_+} a_k - \varepsilon < \sum_{k\in K_+\cap\{1,\dots,n_\varepsilon\}} a_k \leqq \sum_{k\in K_+} a_k,$$
$$\sum_{k\in K_-} (-a_k) \geqq \sum_{k\in K_-\cap\{1,\dots,n_\varepsilon\}} (-a_k) > \sum_{k\in K_-} (-a_k) - \varepsilon$$
となる n_ε をとる。$N > n_\varepsilon$ ならば、
$$\Big(\sum_{k\in K_+} a_k - \sum_{k\in K_-} (-a_k)\Big) - \varepsilon < \sum_{j=1}^{k} a_j < \Big(\sum_{k\in K_+} a_k - \sum_{k\in K_-} (-a_k)\Big) + \varepsilon$$
となる。

3.14.　絶対収束する無限和は和の順序によらない値に収束する。

3.15.　こうして、絶対収束する無限和について、加減乗除ができることになった。

（除法は良い公式がない）実際、小数で割り算をするのは、容易ではない。定数で割るのは簡単である。

3.16.　小数を与える無限和は絶対収束するから、項別の加法、減法、定数倍ができて、循環小数を有理数に直すことができることとなった。

3.17.　再び、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ について。

正の項の和も負の項の和も無限大になる。

任意の r に対して、K_+, K_- から順に項を取って、r の上下で振動させることができる。

この順序でとった部分和は、r に収束する。

無限和の意味が、いろいろとあり得ることを意識すべきである。絶対値が収束すれば、一意に決まるという発見は、数学の基礎の１つである。

3.18.　まとめ。正の実数の可算和は、連続の公理のもと、実数として意味を持ち、

可算和の和＝和の可算和

可算和の積＝積の可算和

となる。

3.19.　正の長さの線分を順に隙間なく並べて、近づく長さ

あるいは、正の長さの線分を一挙に並べた長さ

が並べ方に依らない。

3.20.　長さの積は、面積と考えられる。「可算和の積＝積の可算和」はそれを表している。