２００２年度幾何学特別演習Ｉ演習問題　　４月１０日

復習問題１． $f : \mathbf{R}^m \longrightarrow \mathbf{R}^n$, $g : \mathbf{R}^\ell \longrightarrow \mathbf{R}^m$ がともに連続微分可能な写像の時、$f \circ g : \mathbf{R}^\ell \longrightarrow \mathbf{R}^n$ も連続微分可能な写像であることを示し、f, g, $f \circ g$ のヤコビ行列について $D(f \circ g)(x) = Df(g(x))Dg(x)$ を示せ。

復習問題２． 2 変数関数 $f(x, y)$ についての陰関数定理、平面から平面への写像についての逆写像定理を述べよ。

復習問題３． a, b, c を ± 1 とするとき、$ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ の概形を描け。

演習問題１．

(1)　$f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ を $f(x, y) = x^3 - x + y^2$ で定義するとき、f のヤコビ行列を求めよ。

(2)　(1) の f について、$z \in \mathbf{R}$ の逆像 $f^{-1}(z)$ の各成分が滑らかな曲線となるための z の条件を求めよ。

(3)　$F : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ を $F(x, y, z) = (x^3 - zx + y^2, z)$ で定義するとき、F のヤコビ行列を求めよ。

(4)　(3) の F について、$(s, t) \in \mathbf{R}^2$ の逆像 $F^{-1}(s, t)$ の各成分が、滑らかな曲線となるための (s, t) の条件を求めよ。

演習問題２． $\mathbf{R}^3$ の次の部分集合が滑らかな曲面であるかどうか論ぜよ。

$$X = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} z^2 = -\{x^2 + y^2 - 1\}\{(x+3)^2 + y^2 - 1\} \cdot \\ \qquad\qquad \{(x-3)^2 + y^2 - 1\}\{x^2 + y^2 - 25\} \end{array} \right\}$$

$$Y = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; z^2 = -\{(x+1)^2 + y^2 - 1\}\{(x-1)^2 + y^2 - 1\} \right\}$$

演習問題３． 3 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ 内の点 P_1, ..., P_k と、それらのいくつかを結ぶ線分 $S_1 = \overline{P_{i_1}P_{j_1}}$, ..., $S_m = \overline{P_{i_m}P_{j_m}}$ が与えられているとする。これらの線分は端点以外では交わらないとする。(すべて $\mathbf{R}^3$ の部分集合と考える。) それらの和集合 X が 部分空間としての位相について 1 次元位相多様体となるための条件は何か。このとき、線分の個数と点の個数との間にはどのような関係があるか。