２００２年度幾何学特別演習Ｉ演習問題　　６月１２日

復習問題１． n 次元ユークリッド空間の部分集合 A が、測度０であることの定義を述べよ。

復習問題２． (1) 実数直線の部分集合としてのカントールの３進集合の構成を述べよ。
(2) このカントールの３進集合は測度０であることを示せ。

クイズ． 平面上にある２つの多角形 P_1, P_2 の面積が等しいとする。P_1 と P_2 を有限個の線分で、同じ有限個数の多角形 $P_{11}, \ldots\ P_{1n}$ と $P_{21}, \ldots\ P_{2n}$ に分割して、（番号をうまくつけると）P_{1i} と P_{2i} が合同であるように出来ることを示せ。
（３次元での同じクイズ（分解合同問題）は成立しない。）

復習問題３．
（１）平面上の正規形の常微分方程式とは何か。
（２）平面上の常微分方程式の解の存在と一意性の定理とは何か。

復習問題４． 次の常微分方程式を解け。但し、初期値は $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ とする。

$$(1) \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad (2) \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

演習問題１． コンパクト多様体上の C^∞ 級関数 f_1, f_2 が２階の微分まで近いことはどのように定義すればよいか。

演習問題２． コンパクト多様体上の C^∞ 級関数 f がモース関数であるとき、２階の微分まで f に十分に近い C^∞ 級関数 g は、モース関数であることを示せ。

演習問題３． $f(x, y) = x^3 - x - y^2$ とする。f の等位線の概形を描け。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

の解曲線は、どのような図形になるか。
一般に、上の形の微分方程式の解 $(x(t), y(t))$ について、$f(x(t), y(t))$ は非減少であることを示せ。