２００２年度幾何学特別演習Ｉ演習問題　　６月２６日

復習問題１． コンパクト多様体 M の座標近傍系 (U_i, φ_i) に対し、開集合 $V_i \subset U_i$、$\overline{V_i} \subset U_i$ かつ $\bigcup_i V_i = M$ を満たすものが存在することを示せ。

復習問題２． (1)　ハウスドルフ位相空間 X 上の同値関係 $\sim$ で、商空間 $X/\sim$ が、ハウスドルフ空間とならないものの例を挙げよ。
(2)　多様体 M 上のフロー φ_t に対し、M 上の同値関係を $x \sim y \Longleftrightarrow \exists t, \varphi_t(x) = y$ で定める。$M/\sim$ がハウスドルフ空間になる例と、ハウスドルフ空間にならない例を挙げよ。
(3)　多様体 M への有限群 G の作用 $G \ni g \longmapsto \varphi_g$ に対し、(2) と同様の同値関係を考えると、$M/\sim$ はハウスドルフ空間となることを示せ。

復習問題３． (1)　n 次元ユークリッド空間上の線型ベクトル場 $X = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_j \frac{\partial}{\partial x_i}$, $Y = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} x_j \frac{\partial}{\partial x_i}$ に対して、$[X, Y]$ を求めよ。
(2)　X が生成するフロー φ_t について、$(\varphi_t)_* Y$ を書き下し、
$\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \big((\varphi_t)_* Y\big)$ を求めよ。
但し、$(\varphi_t)_* Y$ はベクトル場 Y を微分同相 φ_t で写したもの
$((\varphi_t)_* Y)(\varphi_t(x)) = (T_x \varphi_t) Y(x)$ すなわち $((\varphi_t)_* Y)(x) = (T_{\varphi_{-t}(x)} \varphi_t) Y(\varphi_{-t}(x))$ で定義される。

復習問題４． G を滑らかな多様体で、群構造を持つものとする。さらに群演算 $G \times G \longrightarrow G$ が C^∞ 級の写像であるとする。(このような G をリー群と呼ぶ。)
(1)　$g \in G$ に対し、$L_g(h) = gh$ で定義される左作用 $L_g : G \longrightarrow G$ 及び、$R_g(h) = hg$ で定義される右作用 $R_g : G \longrightarrow G$ は微分同相写像であることを示せ。
(2)　逆元を対応させる写像 $G \longrightarrow G$ は微分同相写像であることを示せ。
(陰関数定理を使う。)

演習問題１． コンパクト連結多様体 M の座標近傍系 (U_i,φ_i) に対し、
$g_{ij}:\varphi_j(U_i\cap U_j)\longrightarrow\varphi_i(U_i\cap U_j)$ を座標変換とする。$\varphi_i(U_i)\times\{+1\}$, $\varphi_i(U_i)\times\{-1\}$ の disjoint union $\bigsqcup_i(\varphi_i(U_i)\times\{+1\}\cup\varphi_i(U_i)\times\{-1\})$ 上の同値関係 $\sim$ を
$(x_i,\sigma)\in\varphi_i(U_i)\times\{-1,+1\}$, $(x_j,\tau)\in\varphi_j(U_j)\times\{-1,+1\}$ に対し、
$(x_i,\sigma)\sim(x_j,\tau)\iff g_{ij}(x_j)=x_i,\ \mathrm{sign}(\det Dg_{ij}(x_j))\tau=\sigma$ により定義する。

(1) $\widehat{M}=\bigsqcup_i(\varphi_i(U_i)\times\{+1\}\cup\varphi_i(U_i)\times\{-1\})/\sim$ は多様体となることを示せ。

(2) $\widehat{M}\cong M\times\{\pm1\}$ となることと、g_{ij} のヤコビ行列式がすべて正であるような座標近傍系が存在することは同値であることを示せ。（このとき多様体は向き付けを持つという。）

(3) $\widehat{M}$ 自体は常に向き付けを持つ多様体であることを示せ。

(4) M が向き付けを持たないとき $\widehat{M}$ の向き付けを反対にする微分同相写像 τ で、$\tau\circ\tau=\mathrm{id}_{\widehat{M}}$ であり、すべての $\widetilde{x}\in\widehat{M}$ に対し、$\tau(\widetilde{x})\neq\widetilde{x}$ となるものが存在することを示せ。(群 $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ の作用)

演習問題２． $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ は向き付けをもつ１次元多様体である。$p:\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ とする。任意の連続写像 $f:\mathbf{R}/\mathbf{Z}\longrightarrow\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ に対し、ある連続写像 $\widetilde{f}:\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}$ で $f\circ p=p\circ\widetilde{f}$ を満たすものが存在する。以上を認めた上で次を示せ。

(1) $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ の向きを反対にする微分同相写像 f は固定点 x ($f(x)=x$ を満たす点 x) を持つ。

(2) 向き付けをもつ１次元多様体には０にならないベクトル場 ξ が存在することを示せ。

(3) ξ が生成するフロー φ_t を用いて、向き付けをもつコンパクト１次元多様体は $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ と微分同相であることを示せ。

(4) コンパクト１次元多様体は $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ と微分同相であることを示せ。

演習問題４． G をリー群とする。

(1) G 上のベクトル場で任意の $g\in G$ に対し、$(L_g)_*\xi=\xi$ をみたすものを、左不変ベクトル場という。G 上の左不変ベクトル場全体 $\mathfrak{g}$ は $\dim G$ 次元のベクトル空間をなすことを示せ。($\mathfrak{g}$ を G のリー環と呼ぶ。)

(2) ξ,η を左不変ベクトル場とするとき、$[\xi,\eta]$ も左不変ベクトル場であることを示せ。

(3) $\mathbf{1}$ を G の単位元とする。左不変ベクトル場 ξ が生成する１パラメーター変換群を φ_t と書くとき、任意の $g\in G$ に対し、$\varphi_t(g)=g\varphi_t(\mathbf{1})$ を示せ。($\varphi_t(\mathbf{1})=\exp(t\xi)$ と書く。)

(4) ξ に対し、$\exp(\xi)$ を対応させる写像は、$\mathfrak{g}$ の 0 の近傍から G の $\mathbf{1}$ の近傍への微分同相写像であることを示せ。
(逆関数定理を使う。)