２００２年度幾何学特別演習Ｉ演習問題　　７月３日

復習問題１． $M,\ N$ をコンパクト多様体とする。C^∞ 級写像 $f: M \longrightarrow N$ について，M 上のベクトル場 ξ, N 上のベクトル場 η が、すべての $x \in M$ に対し、$(T_x f)\xi(x) = \eta(f(x))$ を満たすとする。（ $f_*\xi = \eta$ とも書かれ、M 上のベクトル場 ξ が、N 上のベクトル場 η に射影されるという。）ξ が生成するフローを $\varphi_t : M \longrightarrow M$, η が生成するフローを $\psi_t : N \longrightarrow N$ とするとき次を示せ。

$$f(\varphi_t(x)) = \psi_t(f(x))$$

復習問題２． m 次元コンパクト多様体 M 上のフロー $\varphi_t(x)$ が、ベクトル場 ξ で生成されているとする。M の $m-1$ 次元コンパクト部分多様体 N に対し、$x \in N$ に対して、$\xi(x) \notin T_x N$ とする。このとき、正実数 ε で、写像 $(-\varepsilon, \varepsilon) \times N \ni (t, x) \longmapsto \varphi_t(x) \in M$ が M の開集合への埋め込みとなるようなものが存在することを示せ。

復習問題３． n 次元コンパクト多様体上には、リーマン計量が存在することを示せ。ヒント：正値対称行列の全体は凸である。座標近傍による有限被覆とそれに従属した１の分割を使う。

復習問題４．　F をコンパクト多様体 M の微分同相写像からなる有限群とする。M 上のリーマン計量 g で F の任意の元 f について $f^*g = g$ を満たすものがあることを示せ。
ヒント：１つのリーマン計量を取り、有限群の作用で移りあう点でのリーマン計量を平均する。

演習問題１．　M をユークリッド空間 $\mathbf{R}^N$ に埋め込まれたコンパクト多様体とする.
(1)　次で定義される X は C^∞ 多様体であることを示せ.

$$X = \{(x, y) \in \mathbf{R}^{2N} | x \in M,\ y \text{ は } T_x M \text{ に直交する }\}$$

(2)　$(x, y) \longmapsto x + y$ で定義される写像 $e : X \longrightarrow \mathbf{R}^N$ は $X \cap (\mathbf{R}^N \times \{0\})$ の近傍では微分同相写像になっていることを示せ.

演習問題２．　コンパクトリーマン多様体 M について、$X \in T_x M$ に対し、$\gamma_X(t)$ を $\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = X$ となる測地線とする。
(1)　$E : T_x M \longrightarrow M$ を $E(X) = \gamma_X(1)$ で定義すると、E は $T_x M$ の 0 の近傍から、M の x の近傍への微分同相写像となることを示せ。
(2)　写像 $F : TM \longrightarrow M \times M$ を $X \in T_x M \subset TM$ に対し、$F(X) = (x, E(X))$ で定義する。F は TM の zero section の近傍から $M \times M$ の $\Delta = \{(x, x) \mid x \in M\} \subset M \times M$ の近傍への微分同相写像となることを示せ。

演習問題３． (1)　コンパクトリーマン多様体 M 上の関数 f について、任意の接ベクトル X に対し、$\langle \mathrm{grad} f, X\rangle = Xf$ となるベクトル場 $\mathrm{grad} f$ を考える。ベクトル場 $\xi = \dfrac{1}{\langle \mathrm{grad} f, \mathrm{grad} f\rangle}\mathrm{grad} f$ の生成するフロー φ_t が定義されている点で、
$f(\varphi_t(x)) = f(x) + t$ となることを示せ。
ヒント：$f : M \longrightarrow \mathbf{R}$ について、$f_*\xi = \dfrac{\partial}{\partial t}$ を示すと、復習問題１が使える。
(2)　M 上のモース関数 f の２つの正則値 t_0, t_1 $(t_0 < t_1)$ の間に臨界値が存在しないと仮定する。$f^{-1}([t_0, t_1])$ は $[t_0, t_1] \times f^{-1}(t_0)$ と微分同相であることを示せ。
（境界のある多様体の微分同相とはこの場合、ε に対し、$f^{-1}((t_0 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon))$ は $(t_0 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon) \times f^{-1}(t_0)$ と微分同相であり、その制限になっているということ。）

演習問題４． m 次元コンパクト連結多様体 M から円周 S^1 への写像 $F : M \longrightarrow S^1$ が、任意の点 x に対し、$\mathrm{rank} T_x F = 1$ を満たすとする。
(1) M 上のベクトル場 ξ で、$F_*\xi = \dfrac{\partial}{\partial t}$ を満たすものが存在することを示せ。
ヒント：M の各点に F を第１座標 x_1 とするような座標近傍が存在する。M のこのような座標近傍 U_i による有限被覆とそれに従属する１の分割 μ_i をとる。$\xi = \displaystyle\sum_i \mu_i \frac{\partial}{\partial x_1}$ が求めるもの。
(2) t_1, $t_2 \in S^1$ に対し、$F^{-1}(t_1)$ と $F^{-1}(t_2)$ は微分同相な $m-1$ 次元多様体であることを示せ。

演習問題５． $\mathbf{C}P^n = (\mathbf{C}^{n+1} - \{0\})/\mathbf{C}^\times$ とする。
(1) 結合写像 $p \circ i$

$$S^{2n+1} \xrightarrow{\ i\ } \mathbf{C}^{n+1} - \{0\} \xrightarrow{\ p\ } \mathbf{C}P^n$$

の rank を求めよ.
(2) $\mathbf{C}P^n$ の相異なる２点 y_1, y_2 に対し、S^{2n+1} の微分同相写像 F で、$F((p\circ i)^{-1}(y_1)) = (p \circ i)^{-1}(y_2)$ とするものがあることを示せ。