２００２年度幾何学特別演習Ｉ演習問題　　４月１７日

復習問題１． (1) 位相空間がコンパクトであることの定義を述べよ。
(2) 位相空間がハウスドルフ空間であることの定義を述べよ。
(3) 位相空間が連結であることの定義を述べよ。
(4) ユークリッド空間の部分集合が開集合であることの定義を述べよ。

復習問題２． ユークリッド空間の部分集合 X が有界閉集合であることとコンパクトであることは同値であることを示せ。

ヒント：片方向きは、「距離空間のコンパクト集合は有界。ハウスドルフ空間のコンパクト部分集合は閉集合。」を示す。反対向きは、「ユークリッド空間の有界閉集合は点列コンパクト（任意の点列は、収束する部分列を持つ）。距離空間が点列コンパクトならば、与えられた開被覆に対しルベーグ数が存在する（ある $\delta > 0$ で、各点の δ 近傍は開被覆に属する開集合の部分集合となる）。距離空間が点列コンパクトならばコンパクト。」を示す。

演習問題． 平面の有界な閉集合 C について以下の性質が同値であることを示せ。但し、$r \geqq 1$ とする。

- 陰関数表示

  すべての $q = (x_0, y_0) \in C$ に対し、q の平面における近傍 U をとると、U 上で定義された C^r 級関数 $F(x, y)$ で、U 上で $(\dfrac{\partial F}{\partial x}, \dfrac{\partial F}{\partial y}) \neq (0, 0)$ を満たすものがあって、$C \cap U = \{(x, y) \mid F(x, y) = F(x_0, y_0)\} \cap U$ となる。

- グラフ表示

  すべての $q = (x_0, y_0) \in C$ に対し、q の平面における近傍 U をとると、実数 x_0 の $\mathbf{R}$ における近傍 U_1 上で定義された C^r 級関数 $f(x)$ が存在して $C \cap U = \{(x, y) \mid y = f(x)\} \cap U$ となるか、または実数 y_0 の $\mathbf{R}$ における近傍 U_2 上で定義された C^r 級関数 $g(y)$ が存在して $C \cap U = \{(x, y) \mid x = g(y)\} \cap U$ となる。

- パラメータ表示

  すべての $q = (x_0, y_0) \in C$ と q の平面における近傍 V に対し、V に含まれる q の平面における近傍 U をとると、ある区間 (a, b) 上で定義された U に値を持つ C^r 級単射 $\varPhi(t) = (\xi(t), \eta(t))$ で, すべての $t \in (a, b)$ に対し $\dfrac{\mathrm{d}\varPhi}{\mathrm{d}t} = (\xi'(t), \eta'(t)) \neq (0, 0)$ となるものがあり、$C \cap U = \{\varPhi(t) \bigm| a < t < b\}$ となる。

最後のパラメータ表示はさらに次のように書かれる。

- 正実数 $T_1, \ldots, T_k$ と $j = 1, \ldots, k$ に対し、実数上の周期 T_j の C^r 級周期関数 $\xi_j(t), \eta_j(t)$ で, すべての t に対し $(\xi_j'(t), \eta_j'(t)) \neq 0$ であり、$(\xi_i(t_1), \eta_i(t_1)) = (\xi_j(t_2), \eta_j(t_2))$ ならば $i = j$ かつ $\dfrac{t_1 - t_2}{T_j}$ は整数となるものが存在して、$C = \{(\xi_1(t), \eta_1(t)) \bigm| t \in \mathbf{R}\} \cup \cdots \cup \{(\xi_k(t), \eta_k(t)) \bigm| t \in \mathbf{R}\}$ となる。