２００２年度幾何学特別演習 I 演習問題　　５月１日

復習問題１． 位相空間 X がハウスドルフ空間ではないとする。このとき、X の相異なる２つの点で、任意の X 上の実数値連続関数の値が等しくなることを示せ。

復習問題２． 集合 X 上の同値関係 $\sim$ とは何か。
集合 X 上の同値関係 $\sim$ による商空間とは何か。
位相空間 X 上の同値関係 $\sim$ による商空間の商位相とは何か？

演習問題１． (1) 平面の原点からでる半直線全体の集合 S には、$\mathbf{R}^2 - \{0\}$ の商空間として、コンパクト１次元多様体の構造が入ることを示せ。
(2) 平面の原点を通る直線全体の集合 P にも、$\mathbf{R}^2 - \{0\}$ の商空間として、コンパクト１次元多様体の構造が入ることを示せ。
(3) このとき、包含写像から誘導される写像 $h : S \longrightarrow P$ が、微分可能であり、各点 $x \in S$ のある近傍 U_x で $h|U_x$ は U_x から $h(U_x)$ への微分同相写像であることを示せ。

演習問題２． xy 平面から原点を除いた位相空間を Z とする。
(1) Z の x 軸に平行な直線の連結成分のなす空間を Y とする。Y の各点 y に対し、開区間と同相な近傍が存在することを示せ。位相空間 Y はハウスドルフでないことを示せ。
(2) Z 上の関数 $f(x, y) = xy$ の等位線の連結成分のなす空間を X とする。X の各点 x に対し、開区間と同相な近傍が存在することを示せ。位相空間 X はハウスドルフでないことを示せ。

参考． コンパクト連結１次元多様体が円周であることの証明は後でベクトル場を用いて示すが、直接示そうとすると以下のような問題に到達する。

問１。位相空間 X の開集合 $U_0,\ U_1$ に対し、実数 $\alpha < a < b < \beta$ と同相写像 $\varphi_0 : U_0 \longrightarrow (\alpha, b)$, $\varphi_1 : U_1 \longrightarrow (a, \beta)$ で、$\varphi_0(U_0 \cap U_1) = \varphi_1(U_0 \cap U_1) = (a, b)$ となり, $f = \varphi_1 \circ (\varphi_0|U_0 \cap U_1)^{-1} : (a, b) \longrightarrow (a, b)$ が向きを保つ微分同相であるとする。このとき、$\psi : U_0 \cup U_1 \longrightarrow (\alpha, \beta)$ で、$\psi \circ {\varphi_0}^{-1} : (\alpha, b) \longrightarrow (\alpha, b)$, $\psi \circ {\varphi_1}^{-1} : (a, \beta) \longrightarrow (a, \beta)$ が微分同相写像となるものが存在することをしめせ。

これに対し、次のように考える。

$f:(a,b)\longrightarrow(a,b)$ を開区間の単調増加な C^∞ 級微分同相写像とする。$[0,1]\times(a,b)$ 上で線分の族 $\{(t,(1-t)x+tf(x))\mid t\in[0,1]\}_{x\in(a,b)}$ を考える。

問２。 $(t,x)\longmapsto(t,(1-t)x+tf(x))$ は微分同相写像 ($[0,1]\times(a,b)$ を含む $\mathbf{R}^2$ の開集合の間の微分同相写像の制限) であることを示せ。

問２の写像の逆写像を $(t,x)\longmapsto(t,p_0(t,x))$ と置く。$p_1(t,x)=f(p_0(t,x))$ と定義する。$p_0(t,x)$, $p_1(t,x)$ は (t,x) を通る線分の両端の座標を与える C^∞ 級関数である。

このとき、次が示せる。$[a,b]$ 上の C^∞ 級関数 μ で、a の近傍で 0, b の近傍で 1, $x\longmapsto p_0(\mu(x),x)$ は $(a,b)\longrightarrow(a,b)$ の微分同相写像となるものが存在する。

問３。$f(x_0)>x_0$ を満たす x_0 があるとき、$[a,b]$ 上の C^∞ 級関数 ν で、a の近傍で 0, b の近傍で 1, $0\leqq\nu(x)\leqq 1$, $\nu'(x)\geqq 0$ を満たすものをうまく取ると、$x\longmapsto(1-\nu(x))x+\nu(x)f(x)$ は $(a,b)\longrightarrow(a,b)$ の微分同相写像であることを示せ。
ヒント：x_0 の近傍で 0 から 1 に変化する ν をとる。

問３の写像の逆写像を $g:(a,b)\longrightarrow(a,b)$ とする。$x\longmapsto p_0(\nu(g(x)),x)$ は微分同相写像である.

問４。$f(x)<x$ ならば、$x\longmapsto p_0(\nu(x),x)$ は $(a,b)\longrightarrow(a,b)$ の微分同相写像であることを示せ。
ヒント：(1) のヤコビ行列の逆行列を考えると、$\dfrac{\partial p_0}{\partial t}>0$ が得られる。

問３、問４から、$[a,b]$ 上の C^∞ 級関数 μ で、a の近傍で 0, b の近傍で 1, $x\longmapsto p_0(\mu(x),x)$ は $(a,b)\longrightarrow(a,b)$ の微分同相写像となるものが出来た。$[0,1]\times(a,b)$ 上で線分の族 $\{(t,(1-t)x+tf(x))\mid t\in[0,1]\}_{x\in(a,b)}$ と $\{(\mu(x),x)\mid x\in(a,b)\}$ を図示してみよ。
この微分同相写像の逆写像を h_0 と置く。h_0 は a の近傍で恒等写像である。また、$x\longmapsto p_1(\mu(x),x)=f(p_0(\mu(x),x))$ も $(a,b)\longrightarrow(a,b)$ の微分同相写像であり、この微分同相写像の逆写像を h_1 と置くと。h_1 は b の近傍で恒等写像である。

この h_0, h_1 は $h_1(f(x))=h_0(x)$ を満たしており、これを使って、問１に答えることができる。
ヒント：$f(\varphi_0(u))=\varphi_1(u)$ だから、$\psi:U_0\cap U_1\longrightarrow(\alpha,\beta)$ を

$$\psi(u)=\begin{cases}\varphi_0(u) & (u\in U_0-U_0\cap U_1)\\ h_0(\varphi_0(u))=h_1(\varphi_1(u)) & (u\in U_0\cap U_1)\\ \varphi_1(u) & (u\in U_1-U_0\cap U_1)\end{cases}$$

と定義すればよい。