２００２年度幾何学特別演習Ｉ演習問題　　５月８日

復習問題１． ユークリッド空間上の C^∞ 級関数 $f(x_1,\ldots,x_n)$ に対し、次を満たす C^∞ 級関数 $g_1(x_1,\ldots,x_n)$, ... , $g_n(x_1,\ldots,x_n)$ が存在することを示せ。

$$f(x_1,\ldots,x_n)=f(0,\ldots,0)+x_1g_1(x_1,\ldots,x_n)+\cdots+x_ng_n(x_1,\ldots,x_n)$$

このとき、$\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(0,\ldots,0)=g_k(0,\ldots,0)$ となる。
ヒント：$f(x_1,\ldots,x_n)-f(0,\ldots,0)=\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}f(tx_1,\ldots,tx_n)}{\mathrm{d}t}\mathrm{dt}$

復習問題２． ３次元ユークリッド空間上の C^∞ 級関数 $F(x,y,z)$ により、$F(x,y,z)=c$ によって定義される曲面（等位面）S_c が与えられているとする。
空間曲線 $(\xi(t),\eta(t),\zeta(t))$ の接ベクトルが、すべての t に対し、$F(x,y,z)$ の等位面の $(\xi(t),\eta(t),\zeta(t))$ における接平面に含まれることと、空間曲線が一つの等位面 S_c に含まれることは同値であることを示せ。

復習問題３． 球面 S^2 は次で定義される。

$$S^2=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3\bigm| x^2+y^2+z^2=1\}$$

(1)　x-y 平面、y-z 平面、x-z 平面への直交射影を使って座標近傍系を定義し、S^2 は多様体であることを示せ。
(2)　平面 $\{x=\pm1\}$、平面 $\{y=\pm1\}$、平面 $\{z=\pm1\}$ への radial projection を使って座標近傍系を定義し、S^2 は多様体であることを示せ。ただし、radial projection は S^2 上の点 x に、原点から x へ向かう半直線と平面との交点を対応させる写像である。
(3)　$(0,0,1)$ からの stereographic projection p_+ および $(0,0,-1)$ からの stereographic projection p_- により、座標近傍系を定義し、S^2 は多様体であることを示せ。ただし、$p_+:S^2-\{(0,0,1)\}\longrightarrow\mathbf{R}^2$ は $(0,0,1)$, x, $(p_+(x),0)$ が同一直線上にあることにより定義される。
(*)　(暇な時に考える問題) stereographic projection は S^2 上の円を $\mathbf{R}^2$ の円または直線に写すことを示せ。

演習問題１.

(1)　$\mathbf{R}P^n = (\mathbf{R}^{n+1} - \{0\})/\mathbf{R}^\times$ はハウスドルフ空間であることを示せ。

(2)　$\mathbf{R}P^n$ は C^∞ 多様体であることを示せ。

(3)　結合写像

$$S^n \longrightarrow \mathbf{R}^{n+1} - \{0\} \longrightarrow \mathbf{R}P^n$$

の rank を求めよ。

演習問題２. n 次元微分可能多様体 X の p における方向微分とは多様体 X 上の滑らかな関数のなす実ベクトル空間 $C^\infty(X)$ 上の線形形式 D で、

$$D(f \cdot g) = Df \cdot g(p) + f(p) \cdot Dg$$

を満たすものである。

(1) p における方向微分の全体 $\mathcal{D}_p$ は実ベクトル空間をなすことを示せ。

(2) X 上の曲線 $c(t)$ で $c(0) = p$ となるものに対して、$C^\infty(X) \ni f \longmapsto D_c(f) = \dfrac{\mathrm{d}(f \circ c)}{\mathrm{d}t}(0)$ とおくと、D_c は p における方向微分であることを示せ。

(3) p における局所座標 $(x_1, \ldots, x_n)$ に対し、曲線 $t \longmapsto (0, \ldots, 0, t, 0, \ldots, 0)$ (k 番目の座標) に対する方向微分を $\dfrac{\partial}{\partial x_k}$ と書くとき、$\{\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x_n}\}$ が $\mathcal{D}_p$ の基底となることを示せ。
ヒント：定数 1 に対して、$D(1) = D(1) + D(1)$ だから $D(1) = 0$. また、p の近傍で 0 となる関数 f について、その近傍上でのみ 0 でない関数 g をとると $Df = D(f \cdot g) = Df \cdot g(p) + f(p) \cdot Dg = Df \cdot g(p)$ だから $Df = 0$ がわかる。従って、Df は f の p の近傍での値のみにより定まっている。また、p の近傍 U で定義された任意の関数 f に対し、p の近傍 V $(\subset U)$ 上で、f に一致する X 上の C^∞ 級関数があることは使ってよいことにする。復習問題 1 を使い、$D(x_k)$ の値により、$D = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} D(x_k) \frac{\partial}{\partial x_k}$ を導く。