２００２年度幾何学特別演習Ｉ演習問題　　５月１５日

復習問題１．X, Y を実ベクトル空間とする。
(1) 実ベクトル空間の次元の定義を述べよ。
(2) 線形写像 $X \longrightarrow Y$ の階数 (rank) の定義を述べよ。

復習問題２．微分可能多様体 X の点 p のまわりの 2 つの局所座標 $(x_1, \ldots, x_n)$, $(y_1, \ldots, y_n)$ が与えられているとする。
(1) $t = 0$ において、p を通る曲線 $(-1, 1) \ni t \longmapsto c(t) \in X$ の表示が、それぞれの局所座標で $(x_1(t), \ldots, x_n(t))$, $(y_1(t), \ldots, y_n(t))$ であるとき、$t = 0$ における $c(t)$ の接ベクトルの表示はそれぞれの局所座標でどのように与えられるか？
(2) 局所座標 $(x_1, \ldots, x_n)$, $(y_1, \ldots, y_n)$ の間の座標変換を
$(y_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_n(x_1, \ldots, x_n))$, $(x_1(y_1, \ldots, y_n), \ldots, x_n(y_1, \ldots, y_n))$ と書くとき、上の接ベクトルの 2 つ表示の間の関係を表せ。

演習問題１．(1) $\mathbf{C}P^n = (\mathbf{C}^{n+1} - \{0\})/\mathbf{C}^\times$ はハウスドルフ空間であることを示せ.
(2) $\mathbf{C}P^n$ は $2n$ 次元 C^∞ 多様体であることを示せ.

演習問題２．(1) $GL(n, \mathbf{R})$, $SL(n, \mathbf{R})$ は多様体であることをしめせ.
(2) 行列の積 $SL(n, \mathbf{R}) \times SL(n, \mathbf{R}) \longrightarrow SL(n, \mathbf{R})$ は C^∞ 級の写像であることをしめせ.　この写像の（ (I, I) (I は単位行列) における) rank を求めよ.