２００２年度幾何学特別演習Ｉ演習問題　　５月２２日

復習問題１． (1) $n \geqq 0$ を整数とするとき、$\lim_{x \searrow 0} \dfrac{1}{x^n} e^{-\frac{1}{x}} = 0$ を示せ。
($y > 0$ のとき、$e^y > \dfrac{y^n}{n!}$ を使っても良い。)
(2) 連続関数 $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbf{R}$ が、$(0, \infty)$ で微分可能かつ導関数 $f'(x)$ が $(0, \infty)$ で連続とする。$\lim_{x \searrow 0} f'(x)$ が存在するならば、$\lim_{x \searrow 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$ は存在し、$\lim_{x \searrow 0} f'(x)$ に等しいことを示せ。
（平均値の定理）
(3) 関数 $\rho : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ を $\rho(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & (x > 0) \\ 0 & (x \leqq 0) \end{cases}$ で定義すると、ρ は C^∞ 級であることを示せ。
（ρ の m 回微分した式の形が (1) の形の式の１次結合となることを示す。）

復習問題２． X^m, Y^n をそれぞれ m 次元、n 次元 C^∞ 級多様体とするとき、直積空間 $X \times Y$ は $m + n$ 次元 C^∞ 級多様体となることを示せ。

クイズ． 長さ 2π の単位円周 S^1 の回転 $2\pi\alpha$ 回転 R_α は、長さ ε の円弧を長さ ε の円弧に写す。S^1 の点 p に R_α または ${R_\alpha}^{-1}$ を何度も施して得られる点の集合 $X = \{{R_\alpha}^n(p) \mid n \in \mathbf{Z}\}$ を考える。α が無理数の時、X は S^1 で稠密であることを示せ。
ヒント：$S^1 - \overline{X}$ は開区間の集まりだから、その開区間のなかで長さが最大のもの J をとり、それが長さ ε であるとする。${R_\alpha}^n(J) \subset S^1 - \overline{X}$ である。$\varepsilon > 2\pi/m$ となる整実数 m に対し、$\{{R_\alpha}^n(J)\}_{n=1,\ldots,m}$ は disjoint ではない。

演習問題１． 複素射影曲線 $\mathbf{C}P^1 = (\mathbf{C}^2 - \{0\})/\mathbf{C}^\times$ と、（２次元）球面
$S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 = 1\}$ は微分同相であることを示せ。

演習問題２． $\mathbf{R}^2 - \{0\}$ 上に同値関係 $\sim$ を次のように定める。

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \iff \exists n \in \mathbf{Z},\ (2^n x_1, 2^n y_1) = (x_2, y_2)$$

(1)　$\mathbf{R}^2 - \{0\}/\sim$ がハウスドルフ空間であることを示せ。
(2)　$\mathbf{R}^2 - \{0\}/\sim$ は２次元多様体であることを示せ。
(3)　$\mathbf{R}^2 - \{0\}/\sim$ は $T^2 = S^1 \times S^1$ と微分同相であることを示せ。