２００２年度幾何学特別演習Ｉ演習問題　　５月２９日

復習問題１. (1)　$f: X \longrightarrow Y$ を位相空間 X からハウスドルフ位相空間 Y への連続な単射とする。X はハウスドルフ空間であることを示せ。
(2)　$f: X \longrightarrow Y$ をコンパクト位相空間 X からハウスドルフ位相空間 Y への連続な全単射とする。f の逆写像が連続で、X と Y は同相写像となることを示せ。

復習問題２. 正則部分多様体の定義を述べよ。

復習問題３. $SO(3) = \{A \in M(3; \mathbf{R}) \,\big|\, {}^tAA = I,\ \det A = 1\}$ は多様体であることをしめせ.

演習問題１. $\mathbf{R}^2$ 上の次で定義される同値関係を考える。

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \Longleftrightarrow \exists (m, n) \in \mathbf{Z}^2,\ (x_1 + m, y_1 + n) = (x_2, y_2)$$

この同値関係による商空間を $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ と書く。
(1)　$\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ はハウスドルフ空間であることを示せ。
(2)　$\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ は２次元多様体であることを示せ。
(3)　A を２行２列の整係数行列とするとき、線形写像 $A: \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ は微分可能な写像 $F_A: \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ を定義することを示せ。
(4)　$\mathrm{rank} F_A$ を求めよ。

演習問題２. C^∞ 級多様体 X の部分多様体 Y, Z が横断的に交わるとは, すべての $x \in Y \cap Z$ について $T_xY + T_xZ = T_xX$ が成立することである.
X のコンパクト部分多様体 Y, Z が横断的に交わるとき, $Y \cap Z$ も X のコンパクト部分多様体になることを示せ.