２００２年度幾何学特別演習Ｉ演習問題　　６月５日

復習問題１． (1)　$f : X \longrightarrow \mathbf{R}$ をコンパクト位相空間 X 上の連続関数とする。次を満たす X の 2 点 x_0, x_1 が存在することを示せ。
"すべての $x \in X$ に対し、$f(x_0) \leqq f(x) \leqq f(x_1)$ が成立する。"
(2)　n を正の整数とする。$f : M \longrightarrow \mathbf{R}$ を n 次元コンパクト C^∞ 級多様体上の C^∞ 級関数とする。$T_x f = 0$ を満たす M の点 x が少なくとも 2 点存在することを示せ。

復習問題２．　n を正の整数とする。$f : M \longrightarrow \mathbf{R}$ を n 次元 C^∞ 級多様体上の C^∞ 級関数とする。f の臨界点、f の臨界値、f の正則値の定義を述べよ。f の臨界点におけるヘッシアンの定義を述べよ。

復習問題３．　ベクトル空間上の対称双線形形式あるいは 2 次形式の定義を述べよ。対称双線形形式あるいは 2 次形式の符号の定義を述べよ。

演習問題１． $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ は $(0, 0, 0)$ でないとする。$\mathbf{R}^2$ 上の関数

$$f(x, y) = (2 + \cos y)(a \cos x + b \sin x) + c \sin y$$

は、$\mathbf{R}^2/(2\pi\mathbf{Z})^2$ 上の関数 $F : \mathbf{R}^2/(2\pi\mathbf{Z})^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ を定義する。F の臨界点の個数が有限個であるための条件を述べよ。臨界点におけるヘッシアンが退化するかどうか調べよ。

演習問題２． (1)　$f(x_1, ..., x_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} k|x_k|^2 \Big/ \sum_{k=1}^{n+1} |x_k|^2$ で定義される関数 $f : \mathbf{C}^{n+1} - \{0\} \longrightarrow \mathbf{R}$ は $\mathbf{C}P^n = (\mathbf{C}^{n+1} - \{0\})/\mathbf{C}^\times$ 上の C^∞ 級関数 $F : \mathbf{C}P^n \longrightarrow \mathbf{R}$ を誘導することを示せ.
(2)　F の臨界点を求めよ.
(3)　F の臨界点におけるヘッシアンの符号を求めよ.