２００２年度幾何学Ｉ　試験問題

２００２年9月１７日

１３：３０－１６：３０

問題１． 3 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ 上の実数値関数 $f:\mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}$ を

$$f(x,y,z)=x^3-3x+y^2+z^2$$

で定義する。$w\in\mathbf{R}$ に対し、$f^{-1}(w)$ は部分多様体となるかどうか論ぜよ。

問題２． 3 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ 上の同値関係 $\sim$ が

$$(x,y,z)\sim-(x,y,z)$$

で生成されているとする。

(1) $\mathbf{R}^3-\{0\}/\sim$ は 3 次元微分可能多様体となることをしめせ。

(2) $\mathbf{R}^3/\sim$ は 3 次元微分可能多様体となりうるかどうか論ぜよ。

問題３． 次の 2 つの条件を満たす空集合でない位相空間の例をひとつ上げよ。

(i) ハウスドルフ空間でない。

(ii) 各点の近傍として 2 次元ユークリッド空間と同相なものが存在する。

問題４． (1) n 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ の p 次元コンパクト部分多様体 X^p と q 次元コンパクト部分多様体 Y^q が横断的に交わることの定義を述べよ。

(2) コンパクト部分多様体 X^p, Y^q が横断的に交わるとき、$X^p\cap Y^q$ もコンパクト部分多様体となることを示せ。

問題５． n を正整数とする。n 次元コンパクト多様体 M の各点 x に対し、M 上のベクトル場 ξ で、次の条件をみたすものが存在することを示せ。

$$\xi \text{ が生成するフロー } \varphi_t: M\longrightarrow M \text{ について、} \varphi_t(x)=x \Longrightarrow t=0.$$