２００２年度幾何学Ｉ　追試験問題

２００２年１２月１１日

１５：３０－１８：３０

問題１． 3 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ 上の実数値関数 $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}$ を

$$f(x, y, z) = (x^2 - 1)^2 + y^2 + z^2$$

で定義する。$w \in \mathbf{R}$ に対し、$f^{-1}(w)$ は部分多様体となるかどうか論ぜよ。

問題２． 2 次元複素ベクトル空間 $\mathbf{C}^2$ 上の同値関係 $\sim$ が

$$(z, w) \sim (\overline{z}, \overline{w})$$

で生成されているとする。複素数 $\mathbf{C}$ において、実数のなす部分空間を $\mathbf{R}$ とする。

$(\mathbf{C}^2 - \mathbf{R}^2)/\sim$ は実４次元微分可能多様体となることをしめせ。

問題３． 通常の微分可能多様体の定義がハウスドルフ空間であることを要請する理由について論ぜよ。

問題４． a, b を正実数とする。3 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ の部分多様体 X と Y を次で定義する。

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2 + a^2\}$$
$$Y = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid y^2 + z^2 = x^2 + b^2\}$$

(1) $a^2 \neq b^2$ ならば X と Y は横断的に交わることを示せ。

(2) $a^2 = b^2$ のとき、X と Y の共通部分は多様体であるかどうか論ぜよ。

問題５． 実数 $\mathbf{R}$ と多様体 M の直積 $\mathbf{R} \times M$ から M への C^∞ 級写像 $\varphi : \mathbf{R} \times M \longrightarrow M$ が、$s, t \in \mathbf{R}$ に対し、$\varphi(s, \varphi(t, x)) = \varphi(s + t, x)$ を満たすとする。

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, x) \right|_{t=0} = \xi(x) \in T_x M$$

によって、$\xi : M \longrightarrow TM$ を定義するとき、次が成立することを示せ。

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, x) = \xi(\varphi(t, x)) \in T_{\varphi(t,x)} M$$