

2

ユークリッド空間の中の多様体

ユークリッド空間の中の滑らかな曲線、曲面を一般化して、ユークリッド空間の中の多様体を定義することができる。

2.1 曲線

ユークリッド空間 \mathbf{R}^n 内の曲線とは区間 (a, b) からの連続写像であるという見方もある。この見方では、滑らかな曲線は C^∞ 級の写像 $\Phi : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}^n$ と考えることになる。

$\Phi(t)$ を時刻 t における点の位置とみると、 t についての微分 $\frac{d\Phi}{dt}(t)$ は時刻 t における速度ベクトル、 t についての2階微分 $\frac{d^2\Phi}{dt^2}(t)$ は時刻 t における加速度ベクトルを表し、これらを含めて滑らかに変化する運動を考えていることになる。

時刻 t_0 において速度ベクトル $\frac{d\Phi}{dt}(t_0)$ が0でないとき、

$$\Phi(t_0) + (t - t_0) \frac{d\Phi}{dt}(t_0)$$

はその瞬間 t_0 の速度ベクトルを保ったままの直線運動を表す。図形的にはこのようにパラメータ表示された直線は、曲線 $\Phi(t)$ の $\Phi(t_0)$ における接線を表している。

$\frac{d\Phi}{dt}(t_0) = \left(\frac{d\varphi_1}{dt}, \dots, \frac{d\varphi_n}{dt} \right)$ が0でないとき、一つの成分 $\frac{d\varphi_i}{dt}(t_0)$ が0でない。 $\varphi_i(t_0) \in \mathbf{R}$ の近傍 V_i で定義された $t_0 \in \mathbf{R}$ の近傍に値を持つ φ_i の逆関数 τ_i があり、

$$\{\Phi(t) \mid t \in \tau_i(V_i)\} = \{\Phi(\tau_i(x_i)) \mid x_i \in V_i\}$$

となる。 $\varphi_i(\tau(x_i)) = x_i$ であるから、この曲線は、 V_i から \mathbf{R}^{n-1} への C^∞ 級写像のグラフとなっている。

一方、 $\frac{d\Phi}{dt}$ が 0 になることを許容すると、 C^∞ 級の写像 $\Phi : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}^n$ の像 $\Phi((a, b))$ は必ずしも滑らかという図形にはならない。実際、写像 $t \mapsto (t^2, t^3)$ の像は $(0, 0)$ においてカusp という尖った図形になっている。また、 \mathbf{R}^n の任意の連結な折れ線は C^∞ 級写像 $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$ の像として書くことができる。

折れ曲がりがない滑らかな曲線を記述するには、その点でパラメータについて微分すると 0 でないとするばよい。連続微分可能な写像 $\Phi : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}^n$ の微分 $\frac{d\Phi}{dt}$ は変化の方向を表すが、 $\frac{d\Phi}{dt} \neq 0$ ならば微分の連続性から変化の方向がほぼ一定であることがわかり、ほぼ真っ直ぐであることが保証される。

滑らかな写像 $g : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}^{n-1}$ のグラフ $\{(t, g(t)) \in \mathbf{R}^n \mid t \in (a, b)\}$ は、微分の最初の成分は常に 1 で滑らかな曲線の性質をもつ。

また、2 変数関数 $f(x, y)$ の陰関数定理も、そのグラフが滑らかな曲線であるような関数 $y = g(x)$ をあたえる。 \mathbf{R}^n の開集合から \mathbf{R}^{n-1} への C^∞ 級写像 $F : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^{n-1}$ が陰関数定理の仮定を満たすときも同様である。

C^∞ 級の写像 $\Phi : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}^n$ が「滑らかな曲線」と言いにくいもう一つの理由は、自己交叉が起こったり、曲線が稠密になったり、そこまでいかなくても曲線が自分自身に収束することも起こり得ることである。

このような折れ曲がりや交叉がない滑らかな曲線であるという性質を \mathbf{R}^n の部分集合に対して表すためには、次のようにすると良い。

定理 2.1.1. \mathbf{R}^n の部分集合 C について以下の性質が同値である。

- 陰関数表示

すべての $\mathbf{x}^0 \in C$ に対し、ある近傍 U をとると、 U 上で定義された C^∞ 級写像 $F : U \rightarrow \mathbf{R}^{n-1}$ で、 U 上でヤコビ行列 DF のランクが $n - 1$ であるようなものがあって、 $C \cap U = \{\mathbf{x} \in U \mid F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}^0)\}$ となる。

- グラフ表示

すべての $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in C$ に対し、ある近傍 U をとると、実数 x_i^0

の近傍 V_i 上で定義された $\mathbf{R}^{n-1} = \mathbf{R}^{i-1} \times \mathbf{R}^{n-i}$ に値をとる C^∞ 級写像 $G = (G_1, G_2)$ が存在して $C \cap U = \{(G_1(x_i), x_i, G_2(x_i)) \mid x_i \in V_i\}$ となる。

●パラメータ表示

すべての $x^0 \in C$ とその近傍 U に対し、 U に含まれる近傍 V をとると、ある区間 (a, b) 上で定義された V に値を持つ C^∞ 級の単射 $\Phi : (a, b) \rightarrow V$ で、すべての $t \in (a, b)$ に対し $\frac{d\Phi}{dt} \neq 0$, $C \cap V = \{\Phi(t) \mid t \in (a, b)\}$ となる。

最後のパラメータ表示が、パラメータについての微分が 0 でないことを述べたものである。しかし、これだけが近傍の取り直しを行っており、他よりも少し複雑な命題である。これは、曲線の位相とパラメータの位相が同じになることを要請するためである

最後のパラメータ表示は C が誘導位相について連結のときにさらに次のように書かれる。

- 実数上の周期 $T \geq 0$ の周期写像 $\Phi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$ で、すべての t に対し $D\Phi \neq 0$ であり、 $\Phi(t_1) = \Phi(t_2)$ ならば $t_1 - t_2$ は T の整数倍となるものが存在して、 $C = \{\Phi(t) \mid t \in \mathbf{R}\}$ となる。 $T = 0$ のときには周期の条件は無条件に満たされる。さらに、 $x = \Phi(t)$ の任意の近傍 U に対し、それに含まれる W と开区間 (a, b) が存在して、 $\Phi^{-1}(C \cap W) = \bigcup_{n \in \mathbf{Z}} (a + nT, b + nT)$ となる。

たとえば次のような図形が排除されている。

例 2.1.2.

$$\{(\sin \theta, \sin 2\theta \mid \theta \in (-\pi, \pi))\}$$

この図形は、 $(-\pi, \pi)$ から \mathbf{R}^2 への C^∞ 級の単射の像である。

このとき、 $(0, 0)$ という点の近傍の逆像は、 0 を含む区間以外に、 $-\pi, \pi$ を端点とする开区間を含む。

この図形は、 $(0, 0)$ において局所ユークリッド的でない

例 2.1.3.

$$\{(x, \sin \frac{\pi}{x}) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in (1, \infty)\} \cup \{(0, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y \in (-2, 2)\} \cup C$$

ここで C は $(1, 0)$ の近傍から $(0, 2)$ の近傍への滑らかな曲線で、他の部分で交わりを持たず、 $(1, 0)$ の近傍と $(0, 2)$ の近傍で、滑らかな曲線の条件を満たすようにとったものである。

このとき、 $(0, 0)$ という点で、 $U = \|(x, y)\| < \frac{1}{2}$ に対しそれに含まれるどのような近傍 V も、図形と無限個の成分で交わり、パラメータ表示の条件を満たさない。他の条件を満たさないことも同様である。

さらに、 \mathbf{R}^3 のフローで稠密な軌道を持つものもある。

今後、 C^∞ 級写像 $(a, b) \rightarrow \mathbf{R}^n$ のことを滑らかな曲線と呼ぶことも多いので、定理の意味の滑らかな曲線は 1 次元多様体と呼ぶことにする。

ユークリッド空間の 1 次元多様体の各点において、接線が自然に定義されている。 $C \cap V = \{\Phi(t) \mid t \in (a, b)\}$ というパラメータ表示からは、前に述べた

$$\Phi(t_0) + (t - t_0) \frac{d\Phi}{dt}(t_0)$$

の形に書かれる。また、 $C \cap U = \{\mathbf{x} \in U \mid F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}^0)\}$ という陰関数表示からは $\{\mathbf{x}^0 + \mathbf{v} \mid DF_{(\mathbf{x}^0)}\mathbf{v} = 0\}$ のようになる。実際、これらの F, Φ は $F(\Phi(t)) = F(\mathbf{x}^0)$ を満たしている。従って、 $DF_{(\Phi(t_0))}D\Phi_{(t_0)} = 0$ となり、 $DF_{(\Phi(t_0))} = DF_{(\mathbf{x}^0)}$ のランクは $n - 1$ であるから、

$$\ker DF_{(\Phi(t_0))} = \{tD\Phi_{(t_0)} \mid t \in \mathbf{R}\}$$

となる。

2.2 (超) 曲 面

3 次元ユークリッド空間の中の曲面を一般化して、 n 次元ユークリッド空間の中で関数の等位面として定義されるものを考えよう。超曲面と呼ばれる。

定理 2.2.1. \mathbf{R}^n の部分集合 S について以下の性質が同値である。

• 陰関数表示

すべての $\mathbf{x}^0 \in S$ に対し、ある近傍 U をとると、 U 上で定義された C^∞ 級関数 $f: U \rightarrow \mathbf{R}^{n-1}$ で、 U 上でヤコビ行列 $Df \neq 0$ であるようなものがあって、 $C \cap U = \{\mathbf{x} \in U \mid f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0)\}$ となる。

• グラフ表示

すべての $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in S$ に対し、ある近傍 U をとると、 i 番目の座標を除いた $n-1$ 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^{n-1} = \mathbf{R}^{i-1} \times \mathbf{R}^{n-i}$ の点 $(x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, x_{i+1}^0, \dots, x_n^0) = (\mathbf{x}_1^0, \mathbf{x}_2^0)$ の近傍 $V_i \subset \mathbf{R}^{i-1} \times \mathbf{R}^{n-i}$ 上で定義された実数値 C^∞ 級関数 $g = g(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ が存在して

$$S \cap U = \{(\mathbf{x}_1, g(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), \mathbf{x}_2) \mid (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in V_i\}$$

となる。

• パラメータ表示

すべての $\mathbf{x}^0 \in S$ とその近傍 U に対し、 U に含まれる近傍 V をとると、 $n-1$ 次元ユークリッド空間の開集合 W 上で定義された V に値を持つ C^∞ 級の単射 $\Phi: W \rightarrow V$ で、すべての $\mathbf{u} \in W$ に対し $D\Phi$ のランクは $n-1$ であり、 $C \cap V = \{\Phi(\mathbf{u}) \mid \mathbf{u} \in W\}$ となる。

パラメータ表示されている超曲面 $C \cap V = \{\Phi(\mathbf{u}) \mid \mathbf{u} \in W\}$ の上には $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_{n-1})$ に対して、 $\Phi(\mathbf{u}_0 + t\mathbf{v})$ ($t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$) の形の曲線がある。この曲線の $\Phi(\mathbf{u}_0)$ における接ベクトルは、 $D\Phi_{(\mathbf{u}_0)}\mathbf{v} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}(\mathbf{u}_0) v_j$ となる。この曲線の接線は $\{\mathbf{x}_0 + tD\Phi_{(\mathbf{u}_0)}\mathbf{v} \mid t \in \mathbf{R}\}$ であり、それらを集めると、接超平面 $\{\mathbf{x}_0 + D\Phi_{(\mathbf{u}_0)}\mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in \mathbf{R}^{n-1}\}$ が得られる。

一方、 $C \cap U = \{\mathbf{x} \in U \mid f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0)\}$ のように陰関数表示されているとすると、同じ接超平面は $\{\mathbf{x}_0 + \mathbf{v} \mid Df\mathbf{v} = 0\}$ と書かれる。なぜなら、 $f(\Phi(\mathbf{u})) = f(\mathbf{x}_0)$ だから、 $Df_{(\Phi(\mathbf{u}_0))}D\Phi_{(\mathbf{u}_0)} = 0$ であるが、 $D\Phi_{(\mathbf{u}_0)}$ のランクは $n-1$ 、 $Df_{(\mathbf{x}_0)} = Df_{(\Phi(\mathbf{u}_0))} \neq 0$ だから、 $\ker Df_{(\mathbf{x}_0)}$ は $n-1$ 次元で、

$$\{\mathbf{x}_0 + \mathbf{v} \mid Df\mathbf{v} = 0\} = \{\mathbf{x}_0 + D\Phi_{(\mathbf{u}_0)}\mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in \mathbf{R}^{n-1}\}$$

が得られる。

2.3 ユークリッド空間の部分多様体

定理 2.3.1. \mathbf{R}^n の部分集合 M について以下の性質が同値である。 $p + q = n$ とする。

- 陰関数表示

すべての $\mathbf{x}^0 \in M$ に対し、ある近傍 U をとると、 U 上で定義された C^∞ 級関数 $F : U \rightarrow \mathbf{R}^q$ で、 U 上でヤコビ行列 DF のランクが q であるようなものがあって、 $C \cap U = \{\mathbf{x} \in U \mid F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}^0)\}$ となる。

- グラフ表示

すべての $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in M$ に対し、ある近傍 U をとると、 p 個の座標方向からなる p 次元ユークリッド空間 \mathbf{R}^p の点実数 $(x_{i_1}^0, \dots, x_{i_p}^0)$ の近傍 W 上で定義された残りの q 個の座標方向からなる q 次元ユークリッド空間 \mathbf{R}^q に値を持つ C^∞ 級写像 G が存在して $M \cap U = \{(x_{i_1}, \dots, x_{i_p}, G(x_{i_1}, \dots, x_{i_p})) \mid (x_{i_1}, \dots, x_{i_p}) \in W\}$ となる。但し、座標は x_{i_1}, \dots, x_{i_p} , 残りの q 個の座標からなる \mathbf{R}^q の順に並べ替えたと考ええる。

- パラメータ表示

すべての $\mathbf{x}^0 \in M$ とその近傍 U に対し、 U に含まれる近傍 V をとると、 p 次元ユークリッド空間の開集合 W 上で定義された V に値を持つ C^∞ 級の単射 $\Phi : W \rightarrow V$ で、すべての $\mathbf{u} \in W$ に対し $D\Phi$ のランクは p であり、 $M \cap V = \{\Phi(\mathbf{u}) \mid \mathbf{u} \in W\}$ となる。

証明。

グラフ表示が与えられたとき、陰関数は $(x_{j_1}, \dots, x_{j_q})$ をのこりの q 個の座標として、写像 $F : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_{j_1}, \dots, x_{j_q}) - G(x_{i_1}, \dots, x_{i_p}) \in \mathbf{R}^q$

を考えると、
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_{j_1}}{\partial x_{j_1}} & \cdots & \frac{\partial f_{j_1}}{\partial x_{j_q}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{j_q}}{\partial x_{j_1}} & \cdots & \frac{\partial f_{j_q}}{\partial x_{j_q}} \end{pmatrix}$$
 は単位行列で、 DF のランクは q かつ $M \cap U = F^{-1}(F(\mathbf{x}^0)) = F^{-1}(0)$ となる。

グラフ表示自体が特殊なパラメータ表示で、

$$\Phi(x_{i_1}, \dots, x_{i_p}) = (x_{i_1}, \dots, x_{i_p}, G(x_{i_1}, \dots, x_{i_p}))$$

としたものである。
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_{i_1}}{\partial x_{i_1}} & \cdots & \frac{\partial \varphi_{i_1}}{\partial x_{i_p}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_{i_p}}{\partial x_{i_1}} & \cdots & \frac{\partial \varphi_{i_p}}{\partial x_{i_p}} \end{pmatrix}$$
 単位行列で、 $D\Phi$ のランクは p かつ $M \cap U = \{\Phi(\mathbf{u}) \mid \mathbf{u} \in W\}$ となる。

陰関数表示が与えられとき、グラフ表示ができることは陰関数定理による。

最後に、パラメータ表示が与えられたとき、 n 行 p 列の行列 $D\Phi =$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial u_p} \end{pmatrix}$$

のランクは p である。このとき、座標 x_1, \dots, x_n

の順序を入れ替えて、
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_p}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_p}{\partial u_p} \end{pmatrix}$$
 が、可逆であるとして良い。

$\varphi(\mathbf{u}^0) = \mathbf{x}^0$, $\Phi_1(\mathbf{u}) = (\varphi_1(\mathbf{u}), \dots, \varphi_p(\mathbf{u}))$ とすると、逆写像定理により、 $(\varphi_1(\mathbf{u}^0), \dots, \varphi_p(\mathbf{u}^0))$ の近傍 W_1 から、 W に値を持つ C^∞ 級写像 H が存在し、 $H \circ \Phi = \text{id}_{H(W_1)}$, $\Phi \circ H = \text{id}_{W_1}$ を満たしている。 $\mathbf{x}_1 = (x_1, \dots, x_p)$, $\Phi_2(\mathbf{u}) = (\varphi_{p+1}(\mathbf{u}), \dots, \varphi_{p+q}(\mathbf{u}))$ ($p+q=n$) として、

$$\Phi(H(\mathbf{x}_1)) = (\Phi_1(H(\mathbf{x}_1)), \Phi_2(H(\mathbf{x}_1))) = (\mathbf{x}_1, \Phi_2(H(\mathbf{x}_1)))$$

を得る。従って、 $(W_1 \times \mathbf{R}^q) \cap V$ において、グラフ表示を得る。

この定理の仮定を満たす図形をユークリッド空間 \mathbf{R}^n の次元 p (余次元 q) 部分多様体と呼ぶ。

ユークリッド空間 \mathbf{R}^n の次元 p (余次元 q) 部分多様体の 1 点 \mathbf{x}^0 での接空間を、 \mathbf{x}^0 を通過する多様体上の曲線の接線の集まりと考えることができる。 $\{\Phi(\mathbf{u}) \mid \mathbf{u} \in W\}$ というパラメータ表示で、

$$\{\mathbf{x}^0 + D\Phi_{(\mathbf{u}^0)}\mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in \mathbf{R}^p\},$$

$C \cap U = \{\mathbf{x} \in U \mid F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}^0)\}$ という陰関数表示で

$$\{\mathbf{x}^0 + \mathbf{v} \mid DF_{(\mathbf{x}^0)}\mathbf{v} = 0\}$$

と書かれる。

問 2.3.2.

$$\{\mathbf{x}^0 + D\Phi_{(\mathbf{u}^0)}\mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in \mathbf{R}^p\} = \{\mathbf{x}^0 + \mathbf{v} \mid DF_{(\mathbf{x}^0)}\mathbf{v} = 0\}$$

を示せ。

解答。これは、線形写像のランクの定義、 \ker の次元、それらの関係がわかっ
ていればすぐにできる。

$F(\Phi(\mathbf{u})) = F(\mathbf{x}^0)$ だから、チェインルールから $DF_{(\Phi(\mathbf{u}^0))}D\Phi_{(\mathbf{u}^0)} = 0$ である。従って、 $\text{im } D\Phi_{(\mathbf{u}^0)} \subset \ker DF_{(\Phi(\mathbf{u}^0))}$ である。 $D\Phi_{(\mathbf{u}^0)}$ のランクは p 、 $DF_{(\mathbf{x}^0)} = DF_{(\Phi(\mathbf{u}^0))}$ のランクは q だから、 $\ker DF_{(\mathbf{x}^0)}$ は $n - q = p$ 次元で、 $\text{im } D\Phi_{(\mathbf{u}^0)} = \ker DF_{(\Phi(\mathbf{u}^0))}$ が得られる。これを \mathbf{x}^0 だけ平行移動したものが、求める等式である。

2.4 逆写像定理、陰関数定理の意味

$m \times n$ 実行列 A は線形写像 $A: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ を表す。 A のランクが k のときには、 $m \times m$ 正則行列 P 、 $n \times n$ 正則行列 Q で、 $PAQ = \begin{pmatrix} 1_k & 0_{k, n-k} \\ 0_{m-k, k} & 0_{m-k, n-k} \end{pmatrix}$ 。

と書くことができる。さらに、 $k = m$ のときには、 $m \leq n$ で、 $n \times n$ 正則行列 Q によって、 $AQ = \begin{pmatrix} 1_m & 0_{m,n-m} \end{pmatrix}$ と書くことができる。 $k = n$ のときには、 $m \geq n$ で、 $m \times m$ 正則行列 P によって、 $PA = \begin{pmatrix} 1_n \\ 0_{m-n,m} \end{pmatrix}$ と書くことができる。

\mathbf{R}^n の開集合 U, V に対し、 C^r 級写像 $F : U \rightarrow V$ が、 C^r 級の逆写像 $G : V \rightarrow U$ を持つとする。すなわち、 F, G が $G \circ F = \text{id}_U, F \circ G = \text{id}_V$ を満たすとする。このとき、 F を C^r 級微分同相 (写像) とよぶ。

逆写像定理は、 \mathbf{R}^n の開集合 U から、 \mathbf{R}^n への C^r 級写像が、 \mathbf{x}^0 において $DF_{(\mathbf{x}^0)}$ が正則行列となれば、 F は \mathbf{x}^0 の近傍 U_1 から $F(\mathbf{x}^0)$ の近傍 V_1 への C^r 級微分同相写像であることを述べている。

このような C^r 級微分同相写像は、行列における正則行列の役割を C^r 写像において、ある近傍に制限された形で、担うことになる。逆写像定理、陰関数定理の意味は、ここにあると見ることにもできる。

すなわち、 \mathbf{R}^n の開集合 U 上で定義された \mathbf{R}^m に値を持つ写像 $F : U \rightarrow \mathbf{R}^m$ を考える。

$n \leq m$ で $\mathbf{x}^0 \in U$ に対し、ヤコビ行列 $DF_{(\mathbf{x}^0)}$ のランクが n であるとする。パラメータ表示におけるヤコビ行列の条件を満たしているという

ことである。 $F = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$ とするとき、グラフ表示を導いたと同様にして、

\mathbf{R}^m の座標の順序を取り替えて、 \mathbf{x}^0 において $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i=1,\dots,n;j=1,\dots,n}$ が可逆として良い。 $F(\mathbf{x}) = (F_1(\mathbf{x}), F_2(\mathbf{x})) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{m-n}$ としよう。このとき、 $(f_1(\mathbf{x}^0), \dots, f_n(\mathbf{x}^0)) = \mathbf{y}_1^0 \in \mathbf{R}^n$ の近傍 W で定義された写像 $G : W \rightarrow \mathbf{R}^n$ によって、 $F(G(\mathbf{y}_1)) = (\mathbf{y}_1, F_2(G(\mathbf{y}_1)))$ 。このとき、 $F(\mathbf{x}^0) = F(G(\mathbf{y}_1^0)) = \mathbf{y}^0$ の近傍 $W \times \mathbf{R}^{m-n} \subset \mathbf{R}^m$ で次のように定義される写像 $H : W \times \mathbf{R}^{m-n} \rightarrow W \times \mathbf{R}^{m-n}$ を考える。

$$H(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 - F_2(G(\mathbf{y}_1)))$$

H の逆写像 H^{-1} は $H^{-1}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 + F_2(G(\mathbf{y}_1)))$ であるから、 H は C^r

級微分同相写像である $(H \circ F \circ G)(y_1) = (y_1, 0)$. さらに、 $\widehat{G} : W \times \mathbf{R}^{m-n} \rightarrow \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{m-n}$ を $\widehat{G}(y_1, y_2) = (G(y_1), y_2)$ で定義すると、 \widehat{G} は $W \times \mathbf{R}^{m-n}$ から $G(W) \times \mathbf{R}^{m-n}$ への微分同相写像である $(\widehat{G} \circ H \circ F \circ G)(y_1) = (G(y_1), 0)$ であるから、 $x \in G(W)$ に対し、 $(\widehat{G} \circ H \circ F)(x) = (x, 0)$ となる。すなわち、 $n \leq m$ で $x^0 \in U$ に対し、ヤコビ行列 $DF_{(x^0)}$ ランクが n であるとすると、 $F(x^0)$ の近傍で定義された微分同相写像 P があって、 x^0 の近傍で $(P \circ F)(x) = (x, 0)$ となる。

$n \geq m$ で $x^0 \in U$ に対し、ヤコビ行列 $DF_{(x^0)}$ のランクが m であるとする。陰関数定理のヤコビ行列の条件を満たしているということである。このとき、

$$F = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} \text{ とするとき、陰関数定理を導いたと同様にして、} \mathbf{R}^n \text{ の座標の順序}$$

を取り替えて、 x^0 において $(\frac{\partial f_i}{\partial x_j})_{i=n-m+1, \dots, n; j=1, \dots, m}$ が可逆として良い。陰関数定理の導き方は、 $\widehat{F} : U \rightarrow \mathbf{R}^n$ を $\widehat{F}(x_1, x_2) = (x_1, F(x_1, x_2))$ で定義して、 $(x_1^0, F(x^0))$ の近傍 V で定義される逆写像 $G : V \rightarrow U$ を使うものであった。 $\widehat{F} \circ G = \text{id}_V$ は、

$$(G_1(y_1, y_2), F(G_1(y_1, y_2), G_2(y_1, y_2))) = (y_1, y_2)$$

と書かれるのであった。この \mathbf{R}^m 成分を見ると、

$$F(G_1(y_1, y_2), G_2(y_1, y_2)) = y_2$$

となることがわかる。

すなわち、 $n \geq m$ で $x^0 \in U$ に対し、ヤコビ行列 $DF_{(x^0)}$ ランクが m であるとする、 x^0 の近傍で定義された微分同相写像 Q^{-1} があって、 x^0 の近傍で $(F \circ Q)(y_1, y_2) = (0, y_2)$ となる。 \mathbf{R}^{n-m} 成分と \mathbf{R}^m 成分と逆に書けば、 $(F \circ Q)(y_2, y_1) = (y_2, 0)$ となる。

微分同相という言葉を用いると、ユークリッド空間 \mathbf{R}^n の中の p 次元多様体 M は次のように定義されるといってよい。

- M の各点 x^0 に対し、ある近傍 U と U からユークリッド空間 \mathbf{R}^n の開集

合 V への微分同相写像 $F : U \rightarrow V$ で $F(M \cap U) = \{(y_1, \dots, y_n) \in V \mid (y_{p+1}, \dots, y_n) = (0, \dots, 0)\}$ となるようなものが存在する。

2.5 多様体上の関数、多様体からの写像

ユークリッド空間の中の多様体を上のように定義した。この上で、解析を行なうためには、その多様体上で定義された関数の扱いを考える必要がある。このときには、局所的なパラメータを用いて考える。

問 2.5.1. $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ 上の関数 f を

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2$$

で定める。 $f(x_1, x_2, x_3)$ はどのような値をとるか。実数 y に対し $f^{-1}(y)$ はどのような図形であるかを論ぜよ。

解答。これは図形的には、球面 S^2 と楕円面 $f(x_1, x_2, x_3) = y$ の位置関係を考えることである。楕円面が \sqrt{y} に比例して変化するときの位置関係の中で特殊なのは、 $(0, 0, \pm 1)$ で接するとき、 $(0, \pm 1, 0)$ で接するとき、 $(\pm 1, 0, 0)$ で接するときの3つの場合である。このようなときの接点の周りがどうなっているかは、パラメータをとることによりわかる。

実際、 S^2 の $x_1 \neq 0$ の部分においては、 S^2 のグラフ表示で、 (x_2, x_3) をパラメータにとることができ、 $x_1 > 0$ の半球と $x_1 < 0$ の半球があるが、

$$f = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 = 1 + x_2^2 + 2x_3^2$$

と書かれる。この関数は、 $(x_2, x_3) = (0, 0)$ で最小値 1 をとり、 $1 < y < 2$ のとき、 (x_2, x_3) 座標における単位円板に含まれる楕円 $x_2^2 + 2x_3^2 = y - 1$ 上で y をとる。

S^2 の $x_2 \neq 0$ の部分においては、 S^2 のグラフ表示で、 (x_1, x_3) をパラメータにとることができ、 $x_2 > 0$ の半球と $x_2 < 0$ の半球があるが、

$$f = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 = 2 - x_1^2 + x_3^2$$

と書かれる。この関数は、 $(x_1, x_3) = (0, 0)$ で鞍点をもちそこでの値は 2 である。パラメータ (x_1, x_3) について、 $y = 2$ の点は単位円板内の直線 $x_3 = \pm x_1$ であり、 $x_2 = 0$ の円でつながって、 S^2 上の直交する 2 つの大円の和集合である。パラメータ (x_1, x_3) については、 $1 < y < 2$, $2 < y < 3$ に対して、双曲線の単位円板内の部分が $f^{-1}(y)$ として現れる。

S^2 の $x_3 \neq 0$ の部分においては、 S^2 のグラフ表示で、 (x_1, x_2) をパラメータにとることができ、 $x_1 > 0$ の半球と $x_1 < 0$ の半球があるが、

$$f = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 = 3 - 2x_1^2 - x_2^2$$

と書かれる。この関数は、 $(x_1, x_2) = (0, 0)$ で最大値 3 をとり、 $2 < y < 3$ のとき、 (x_1, x_2) 座標における単位円板に含まれる楕円 $2x_1^2 + x_2^2 = 3 - y$ 上で y をとる。

これをまとめると、 $f(x_1, x_2, x_3)$ の値域は $[1, 3]$ であり、 $f^{-1}(1)$, $f^{-1}(3)$ は 2 点からなる集合、 $f^{-1}(y)$, ($1 < y < 2$, $2 < y < 3$) は 2 つの円と同相な集合、 $f^{-1}(2)$ は S^2 上の直交する 2 つの大円の和集合である。

2.6 直線、超平面との関係

ユークリッド空間の多様体と直線や超平面の関係を考える。

ユークリッド空間の直線は、 $\{x_0 + tv_0 \in \mathbf{R}^n \mid t \in \mathbf{R}\}$ のように、直線上の 1 点 x_0 と直線の方向を与えるベクトル $v_0 \neq 0$ により表される。

しかし、多様体と直線や超平面の関係を調べるには、1 つの直線や超平面ではなくそれと平行な直線や超平面の族を考えるほうが自然である。

ユークリッド空間の超平面は、0 でない線形形式 $L : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ と $a \in \mathbf{R}$ によって、 $\{x \in \mathbf{R}^n \mid Lx = a\}$ のように表される。異なる a に対する超平面は平行である。

ユークリッド空間の直線を、ランクが $n - 1$ の線形写像 $A : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^{n-1}$ と $y \in \mathbf{R}^{n-1}$ によって、 $\{x \in \mathbf{R}^n \mid Ax = y\}$ のように表すこともできる。異

なる y に対する直線は平行である。

平面上の2次曲線に対して、直線は交点を持つ場合と持たない場合があり、交点を持つ場合には、接する場合と2点で交わる場合がある。与えられた直線に平行な直線全体を考えると、直線のほとんどは交わらないが、2点で交わり、その間に、接する点を通過している。

滑らかな曲線は $\Phi(t)$ のようなパラメータを持ち、 $\frac{d\Phi}{dt}(t) \neq 0$ を満たしている。これは、ある点の運動の軌跡とも考えられる。このとき $\Phi(t_0)$ を通り、速度ベクトルにあたる $\frac{d\Phi}{dt}(t_0)$ の方向のベクトルを持つ直線がこの滑らかな曲線の $\Phi(t_0)$ における接線というものである。

線形写像 $A : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^{n-1}$ のランクが $n-1$ であるとする。線形写像 $A : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^{n-1}$ よる \mathbf{R}^{n-1} の点の逆像として与えられる平行な直線族と超曲面 S との位置関係を考えることは、線形写像 $A : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^{n-1}$ と、超曲面を局所的にパラメータ表示する写像 $\Phi : W \rightarrow \mathbf{R}^n$ の関係を考えることである。もっとも重要な場合は $\mathbf{u}^0 \in W$ で $A \circ \Phi : W \rightarrow \mathbf{R}^{n-1}$ が逆写像定理の仮定をみたす、すなわち、 $A \circ D\Phi(\mathbf{u}^0)$ が可逆な場合である。このときは、この直線族は、 $\mathbf{x}^0 = \Phi(\mathbf{u}^0)$ の近傍で、 S に突き刺さっている。このとき直線族は超曲面 S と横断的であるという。 S のパラメータの空間として A の像の \mathbf{R}^n の開集合をとることができる。

これが成立しない場合、 \mathbf{u}^0 において、 $A \circ D\Phi(\mathbf{u}^0)$ のランクが $n-2$ 以下であるが、それは $D\Phi(\mathbf{u}^0)$ の像が $\ker A$ を含むことによっておこる。このようなときに、直線 $A^{-1}A(\mathbf{x}^0)$ は \mathbf{x}^0 において、 S に接するという。逆に $\ker A$ が $D\Phi(\mathbf{u}^0)$ の像に含まれれば、 $A \circ D\Phi(\mathbf{u}^0)$ のランクが $n-2$ 以下となる。そこで、 $D\Phi(\mathbf{u}^0)$ の像を S の \mathbf{x}^0 における接超平面あるいは接空間と呼ぶ。

これは一般の部分多様体に対してもそのまま一般化される。 M が \mathbf{R}^n の中の p 次元の部分多様体であるとする。上のような線形写像 $A : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^{n-1}$ に対し、 $A \circ D\Phi(\mathbf{u}^0)$ のランクが p かどうかを考える。ランクが p であれば、 $A \circ \Phi$ の像は \mathbf{R}^{n-1} の多様体の条件の一部を満たしている。

これが成立しない場合、 \mathbf{u}^0 において、 $A \circ D\Phi(\mathbf{u}^0)$ のランクが $p-1$ 以下であるが、それは $D\Phi(\mathbf{u}^0)$ の像が $\ker A$ を含むことによっておこる。このようなときに、直線 $A^{-1}A(\mathbf{x}^0)$ は \mathbf{x}^0 において、 M に接するという。そこで、 $D\Phi(\mathbf{u}^0)$

の像を M の \mathbf{x}^0 における接空間と呼ぶ。

線形形式 $L : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ との関係で記述することもできる。 $L \circ D\Phi(\mathbf{u}^0)$ のランクが 1 かどうかを考える。ランクが 1 であれば、 \mathbf{x}_0 の近くで、陰関数定理の仮定を満たすから、 L の値が $L(\mathbf{x}_0)$ と等しい点は $p-1$ 次元の多様体の条件を満たす。

ランクが 0 になるのは、 $\ker L$ が $D\Phi(\mathbf{u}^0)$ の像を含むときに起こる。特に超曲面の場合 $\ker L$ は $D\Phi(\mathbf{u}^0)$ と一致している。 $L^{-1}(L(\mathbf{x}^0))$ を超曲面の接超平面と呼んだのである。超曲面が局所的に $f : U \rightarrow \mathbf{R}$ で陰関数表示されていれば、 \mathbf{x}^0 における接超平面を与える L としては、

$$\mathbf{x} \rightarrow \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) x_j$$

をとることができる、

$$\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) (x_j - x_j^0) = 0\}$$

となる。

超曲面に限らず、一般の多様体の場合も $L^{-1}(L(\mathbf{x}^0))$ は \mathbf{x}^0 で M に接するといっても良い。この超平面をどのようにとっても、 $D\Phi(\mathbf{u}^0)$ の像を含み、 $L \circ D\Phi(\mathbf{u}^0)$ のランクが 0 になるような L についての共通部分は、 $D\Phi(\mathbf{u}^0)$ の像と一致する。これを M の \mathbf{x}^0 における接空間と呼んだのである。

問 2.6.1. \mathbf{R}^3 内の曲面 $z = x^3 + xy$ 上の点 (x_0, y_0, z_0) における接平面の方程式を求めよ。この接平面が x 軸に平行になるような点 (x_0, y_0, z_0) の全体はどのような図形となるか。 x 軸を含む平面も x 軸と平行と考える。その図形の xy 平面への正射影、 xz 平面への正射影、 yz 平面への正射影のみたす方程式を求めよ。

解答. (x_0, y_0, z_0) ($z_0 = x_0^3 + x_0 y_0$) における $f(x, y, z) = z - x^3 - xy$ のヤコビ行列は $(-3x_0^2 - y_0, -x_0, 1)$ である。従って、

$$(-3x_0^2 - y_0)x + (-x_0)y + z = (-3x_0^2 - y_0)x_0 + (-x_0)y_0 + z_0$$

が接平面の方程式である． (x_0, y_0) だけで表せば、

$$(-3x_0^2 - y_0)x + (-x_0)y + z = -2x_0^3 - y_0x_0$$

この平面が x 軸と平行であるのは、 $-3x_0^2 - y_0 = 0$ のときである．これは曲線 $\{(x_0, -3x_0^2, -2x_0^3) \mid x_0 \in \mathbf{R}\}$ 上の点である．この曲線は、 x 軸上の yz 平面に値を持つ関数のグラフの形をしているから、滑らかな曲線である．

この図形の、 xy 平面への正射影、 xz 平面への正射影、 yz 平面への正射影は、それぞれ

$$\{(x_0, -3x_0^2) \mid x_0 \in \mathbf{R}\}, \{(x_0, -2x_0^3) \mid x_0 \in \mathbf{R}\}, \{(-3x_0^2, -2x_0^3) \mid x_0 \in \mathbf{R}\}$$

であり、それぞれ、方程式

$$y = -3x^2, z = -2x^3, \left(\frac{y}{3}\right)^3 + \left(\frac{z}{2}\right)^2 = 0$$

によって定められている．