

7

多様体上の曲線の長さ

7.1 ユークリッド空間の中の多様体上の曲線

多様体上の遠近は、そのままでは測ることが出来ない。実際、2次元以上の連結な部分多様体 M 上の相異なる3点 x_0, x_1, x_2 に対し、微分同相 $F: M \rightarrow M$ で $F(x_0) = x_0, F(x_1) = x_2$ とするものがある。

一方、ユークリッド空間の中の多様体に対しては、多様体上の2点について遠近が議論できる。しかし、ユークリッド空間内の距離と多様体上での遠近は必ずしも一致しない。

例えば、1次元部分多様体 C が $c: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$ でパラメータづけられているとき、 C 上の距離は、 C に沿う弧の長さを使うのが自然である。

ユークリッド空間内の曲線 c の t_0 から t_1 までの長さは、 $\int_{t_0}^{t_1} \left\| \frac{dc}{dt}(t) \right\| dt$ で与えられる。

問 7.1.1. (1) \mathbf{R}^n の2点 $\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1$ に対し、 $c(0) = \mathbf{x}^0, c(1) = \mathbf{x}^1$ となる曲線の中で長さが最小のものは、 $\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1$ を結ぶ線分であることを示せ。

(2) $c(0) = \mathbf{x}^0, c(1) = \mathbf{x}^1$ となる曲線に対し、 $A(c) = \int_0^1 \left\| \frac{dc}{dt} \right\|^2 dt$ とおく。 $A(c)$ が最小となる $c(t)$ は、 $c(t) = \mathbf{x}^0 + t(\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0)$ となることを示せ。

解答. (1). 曲線の長さを $\sup_{0=t_0 < \dots < t_m=1} \sum_{k=1}^m \|c(t_k) - c(t_{k-1})\|$ と定義できることを示せば、三角不等式から従う。また、 $\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0$ 方向の単位ベクトルを

\mathbf{v} として、 $c(t) \bullet \mathbf{v}$ を考える。 $\left\| \frac{dc}{dt}(t) \right\| \geq \left| \frac{dc}{dt}(t) \bullet \mathbf{v} \right|$ であるから、

$$\int_0^1 \left\| \frac{dc}{dt}(t) \right\| dt \geq \int_0^1 \left| \frac{dc}{dt}(t) \bullet \mathbf{v} \right| dt \geq \left[c(t) \bullet \mathbf{v} \right]_0^1 = (\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0) \bullet \mathbf{v} = \|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0\|$$

である。

(2).

$$\begin{aligned} A(c + s\varepsilon) &= \int_0^1 \left\| \frac{dc}{dt} + s \frac{d\varepsilon}{dt} \right\|^2 dt \\ &= \int_0^1 \left(\frac{dc}{dt} + s \frac{d\varepsilon}{dt} \right) \bullet \left(\frac{dc}{dt} + s \frac{d\varepsilon}{dt} \right) dt \\ &= \int_0^1 \left\| \frac{dc}{dt} \right\|^2 dt + 2s \int_0^1 \frac{dc}{dt} \bullet \frac{d\varepsilon}{dt} dt + s^2 \int_0^1 \left\| \frac{d\varepsilon}{dt} \right\|^2 dt \end{aligned}$$

s についての2次式が c において極小値を取るためには、 $\int_0^1 \frac{dc}{dt} \bullet \frac{d\varepsilon}{dt} dt = 0$ でなければならない。このためには、 $\frac{dc}{dt} = 0$ でなければならない。このとき c は t についての1次式で $c(t) = \mathbf{x}^0 + t(\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0)$ となる。 $A(c) \geq (L(c))^2$ で、 c は $L(c)$ の最小値を与えているから、 $A(c)$ の最小値も与えている。

ユークリッド空間の中の連結な多様体 $M \subset \mathbf{R}^n$ を考える。 M 上の曲線 $[0, 1] \rightarrow M \subset \mathbf{R}^n$ の長さも同じ $L(c) = \int_0^1 \left\| \frac{dc}{dt}(t) \right\| dt$ で与えられる。連結な多様体上の2点は、滑らかな曲線で結ぶことができるから、 $x, y \in M$ に対し、 $\text{dist}(x, y) = \inf \{ L(c) \mid c : [0, 1] \rightarrow M, c(0) = x, c(1) = y \}$ と定義すると、これは、対称性、三角不等式を満たす。 $\text{dist}(x, y) \geq 0$ であり、 $\text{dist}(x, y) = 0$ とすると、上の問により、 $\text{dist}(x, y) \geq \|x - y\|$ であるから、 $x = y$ となる。従って、 $\text{dist}(x, y)$ は距離となる。

問 7.1.2. 3次元ユークリッド空間 \mathbf{R}^3 内の $(0, 0, -R)$ を中心とする半径 R の球面を $S_R = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + (z + R)^2 = R^2\}$ とする。このとき $p : S_R \setminus \{(0, 0, -2R)\} \rightarrow \mathbf{R}^2$ を $(0, 0, -2R), \mathbf{x}, (p(\mathbf{x}), 0)$ が同一直線上にあることで定義する。 \mathbf{R}^2 上の曲線 $c(t) = (\xi(t), \eta(t))$ ($t \in [0, 1]$) に対し、 $p^{-1} \circ c : [0, 1] \rightarrow S_R$ の長さを書き表せ。

解答。 $p(x, y, z) = \left(\frac{2Rx}{2R+z}, \frac{2Ry}{2R+z} \right)$ であり、

$$p^{-1}(u, v) = \left(\frac{4R^2u}{u^2+v^2+4R^2}, \frac{4R^2v}{u^2+v^2+4R^2}, -\frac{2R(u^2+v^2)}{u^2+v^2+4R^2} \right)$$

である。ヤコビ行列を計算すると次のようになる。

$$Dp^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4R^2(-u^2+v^2+4R^2)}{(u^2+v^2+4R^2)^2} & -\frac{8R^2uv}{(u^2+v^2+4R^2)^2} \\ -\frac{8R^2uv}{(u^2+v^2+4R^2)^2} & \frac{4R^2(u^2-v^2+4R^2)}{(u^2+v^2+4R^2)^2} \\ -\frac{8R^3(2u)}{(u^2+v^2+4R^2)^2} & -\frac{8R^3(2v)}{(u^2+v^2+4R^2)^2} \end{pmatrix}$$

$${}^t(Dp^{-1})(Dp^{-1}) = \begin{pmatrix} \frac{(4R^2)^2}{(u^2+v^2+4R^2)^2} & 0 \\ 0 & \frac{(4R^2)^2}{(u^2+v^2+4R^2)^2} \end{pmatrix}$$

だから、

$$\int_0^1 \left\| \frac{d(p^{-1} \circ c)}{dt} \right\| dt = \int_0^1 \frac{(4R^2)(\xi'(t)^2 + \eta'(t)^2)}{(\xi(t)^2 + \eta(t)^2 + 4R^2)} dt$$

問 7.1.3. $\Phi: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ を $\Phi(x, y) = \begin{pmatrix} (2 + \cos y) \cos x \\ (2 + \cos y) \sin x \\ \sin y \end{pmatrix}$ で定める。 M を Φ

の像として定義される \mathbf{R}^3 の部分多様体とする。 \mathbf{R}^2 上の曲線 $c(t) = (\xi(t), \eta(t))$ ($t \in [0, 1]$) に対し、曲線 $c: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2$ に対し、 $\Phi \circ c: [0, 1] \rightarrow M$ の長さを書き表せ。

一般の多様体上で曲線の長さを測るために何が必要かをみるために、座標近傍のモデルであった、ユークリッド空間の中の多様体のパラメータ表示において、曲線の長さがどのように計算されるかを考える。

$M \subset \mathbf{R}^n$ をユークリッド空間の中の多様体として、そのパラメータ表示 $\Phi: W \rightarrow \mathbf{R}^n$ をとる。 $W \subset \mathbf{R}^p$ は解集合で、 $D\Phi$ のランクは p である。曲

線 $c: [0, 1] \rightarrow M$ に対して、 $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1$ という分割をとり、 $c([t_{i-1}, t_i]) \subset \Phi(W)$ とする。曲線は $\Phi^{-1} \circ c|_{[t_{i-1}, t_i]}: [t_{i-1}, t_i] \rightarrow W$ を定める。

$$\frac{dc}{dt}(t) = (D\Phi)_{(\Phi \circ c)(t)} \frac{d(\Phi^{-1} \circ c)}{dt}(t)$$

の長さ

$$\sqrt{{}^t \left(\frac{d(\Phi^{-1} \circ c)}{dt} \right) (D\Phi)(D\Phi) \left(\frac{d(\Phi^{-1} \circ c)}{dt} \right)}$$

が接ベクトルの長さである。ここで、 $\left(\frac{d(\Phi^{-1} \circ c)}{dt} \right) \in \mathbf{R}^p$ $A = {}^t(D\Phi)(D\Phi)$ は $p \times p$ 正値対称行列である。正値とは、 ${}^t \mathbf{x} A \mathbf{x} \geq 0$ であり、 ${}^t \mathbf{x} A \mathbf{x} = 0$ ならば $\mathbf{x} = 0$ であることである。あるいは、 A の固有値が全て正であるといっても良い。

正値対称行列 A により、 ${}^t \mathbf{v} A \mathbf{v}$ の形で表されるものは、内積または双 1 次形式 $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto {}^t \mathbf{u} A \mathbf{v}$ を考えることに関係している。ベクトルの長さが表されると、余弦定理により角度が定まる。これは、ユークリッドの内積については、 $\mathbf{v} \bullet \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^2$ として、2つのベクトル \mathbf{u}, \mathbf{v} の間の角度を θ とするとき、 $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta$ であったことに対応している。

長さを測るにあたって、長さの 2 乗を表すのが自然である。

一般の実線形空間 V に対し $q: V \rightarrow \mathbf{R}$ が 2 次形式とは、 $a \in \mathbf{R}, \mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$ に対し、 $q(a\mathbf{v}) = a^2 q(\mathbf{v})$ 、 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$ に対し、 $q(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = q(\mathbf{u}) + q(\mathbf{v}) + 2B(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ という双 1 次形式 $B: V \times V \rightarrow \mathbf{R}$ があることである。さらに 2 次形式 q が正値であるとは $q(\mathbf{v}) = 0$ ならば $\mathbf{v} = 0$ を満たすことである。上の双 1 次形式は、対称性 $B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = B(\mathbf{v}, \mathbf{u})$ を満たす。 B から q は容易に復元される、 $2^2 q(\mathbf{v}) = q(\mathbf{v} + \mathbf{v}) = 2q(\mathbf{v}) + 2B(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ であるから、 $q(\mathbf{v}) = B(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ である。 V の基底 (e_1, \dots, e_n) を取って、 $A_{ij} = B(e_i, e_j)$ とすると、 $B\left(\sum u_i e_i, \sum v_j e_j\right) = \sum_{i,j} u_i A_{ij} v_j$ と書かれ、 A_{ij} は正値対称行列である。

7.2 リーマン計量

一般の多様体 M 上では、 x のまわりの座標近傍 (U, φ) をとると、 $T_x M$ の基底 $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ が定まる。 $T_x M$ の元の長さの 2 乗をあたえる関数 $q(x) : T_x M \rightarrow \mathbf{R}$ を考える。 x は M 上の点であるから、 C^∞ 級関数 $q : TM \rightarrow \mathbf{R}$ で、 $q|_{T_x M}$ が正値 2 次形式となるものを与えれば接ベクトルの長さの 2 乗が定まる。これに付随して、正値対称双 1 次形式 $g : T_x M \times T_x M \rightarrow M$ が定まる。通常、この g をリーマン計量と呼ぶ。 g は $x \in M$ に滑らかに依存する $T_x M$ 上の正値対称双 1 次形式である。

x のまわりの座標近傍 (U, φ) により、 $x \in U$ に対し $T_x M$ の基底 $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ が同時に定まる。そのような、基底について、 $v \in T_x M$ は $v = \sum_i v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ と書かれ、 $q(v) = g(v, v) = \sum_{i,j} g_{ij}(x) v_i v_j$ と書かれる。 $x \in U$ に対し、 $(g_{ij}(x))$ は正値対称行列、 i, j を固定すると $g_{ij} : U \rightarrow \mathbf{R}$ は C^∞ 級関数である。

このようなリーマン計量を持つ多様体をリーマン多様体と呼ぶ。

リーマン多様体 M 上では曲線の長さを測ることが出来る。すなわち、 $c : [0, 1] \rightarrow M$ に対して、

$$L(c) = \int_0^1 \sqrt{q\left(\frac{dc}{dt}\right)} dt = \int_0^1 \sqrt{g\left(\frac{dc}{dt}, \frac{dc}{dt}\right)} dt$$

で定める。

M の座標近傍系を $\{U_k, \varphi_k\}$ とする。 $c : [0, 1] \rightarrow M$ に対して、 $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1$ という分割をとり、 $c([t_{k-1}, t_k]) \subset U_k$ とする。 U_k 上では、リーマン計量は $g_{ij}^{(k)}$ と書かれ、 $\varphi_k(c(t)) = (c_1^{(k)}(t), \dots, c_n^{(k)}(t))$ とすれば、曲線の長さは

$$L(c) = \sum_k \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij}^{(k)}(c(t)) \frac{dc_i^{(k)}}{dt}(t) \frac{dc_j^{(k)}}{dt}(t)} dt$$

で与えられる。

例 7.2.1. a を実数とする。 \mathbf{R}^n の原点の近傍において、 $q(\sum v_i \frac{\partial}{\partial x_i}) = \frac{\sum v_i^2}{(1+a(\sum x_i^2))^2}$ とする。この式で $a > 0$ のときには、 \mathbf{R}^n 全体で、 $a < 0$ のときには、 $\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| < \frac{1}{\sqrt{|a|}}\}$ においてリーマン計量が定義されている。0 と $(r, 0, \dots, 0)$ を結ぶ線分 $[0, r] \rightarrow \mathbf{R}^n$ の長さは、 $\int_0^r \frac{1}{1+at^2} dt$ で与えられる。 $a > 0$ ならば $\int_0^r \frac{1}{1+at^2} dt = \frac{1}{\sqrt{a}} \left[\tan^{-1} \sqrt{at} \right]_0^r = \frac{1}{\sqrt{a}} \tan^{-1} \sqrt{ar}$ で与えられる。これは $r \rightarrow \infty$ のときに有限値 $\frac{\pi}{2\sqrt{a}}$ に収束する。 $a < 0$ ならば $\int_0^r \frac{1}{1+at^2} dt = \frac{1}{2\sqrt{|a|}} \left[\log \frac{1+\sqrt{|a|}t}{1-\sqrt{|a|}t} \right]_0^r = \frac{1}{2\sqrt{|a|}} \log \frac{1+\sqrt{|a|}r}{1-\sqrt{|a|}r}$ で与えられる。これは $r \rightarrow \frac{1}{\sqrt{|a|}}$ のときに無限大に発散する。また、 \mathbf{R}^n の円 $(\cos \theta, \sin \theta, 0, \dots, 0)$ の長さは、 $\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+ar^2} d\theta = \frac{2\pi}{1+ar^2}$ で与えられる。このような空間での円周率は半径に依存する。

連結なリーマン多様体上の2点は、滑らかな曲線で結ぶことが出来るから、 $x, y \in M$ に対し、 $\text{dist}(x, y) = \inf\{L(c) \mid c: [0, 1] \rightarrow M, c(0) = x, c(1) = y\}$ と定義すると、これは、対称性、三角不等式を満たす。 $\text{dist}(x, y) \geq 0$ である。 $\text{dist}(x, y) = 0$ とすると $x = y$ となることは次のようにして示す。 x の近傍 (u, φ) 上で g_{ij} と表示すると、ある $\varepsilon, \delta > 0$ に対し、 $\varphi^{-1}(B_\varepsilon(\varphi(x)))$ 上で $\sum_{i,j} g_{ij}(x)v_iv_j \geq \delta \sum_i v_i^2$ となる。従って、 $y \in \varphi^{-1}(B_\varepsilon(\varphi(x)))$ ならば、 $\text{dist}(x, y) \geq \delta \|\varphi(x) - \varphi(y)\|$ となり、 $\text{dist}(x, y) = 0$ とすると $x = y$ となる。 $y \notin \varphi^{-1}(B_\varepsilon(\varphi(x)))$ とすると、 $\varphi^{-1}(B_\varepsilon(\varphi(x)))$ の近傍で定義された関数 $z \mapsto \|\varphi(x) - \varphi(z)\|^2$ を M 上に拡張する $\varphi^{-1}(B_\varepsilon(\varphi(x)))$ の外で ε^2 より大きな値をとる関数を考えることにより、中間値の定理から、 x, y を結ぶ曲線は $\varphi^{-1}(\partial B_\varepsilon(\varphi(x)))$ と交わる。但し $\partial B_\varepsilon(\varphi(x)) = \{\|y - \varphi(x)\| = \varepsilon\}$ である。従って、 $\text{dist}(x, y) \geq \min\{\text{dist}(z, x) \mid z \in \partial B_\varepsilon(\varphi(x))\} \geq \delta\varepsilon$ となる。

これにより、リーマン多様体上の距離が定まった。

7.3 測 地 線

一つの座標近傍上で考えると、 \mathbf{R}^n の開集合 V 上の曲線 $c: [0, 1] \rightarrow V \subset \mathbf{R}^n$ の長さを積分 $L(c) = \int_0^1 \sqrt{\sum g_{ij} \frac{dc_i}{dt} \frac{dc_j}{dt}} dt$ により定義しているときに、 $c(0) = \mathbf{x}^0$, $c(1) = \mathbf{x}^1$ を満たす c の中で $L(c)$ の値が最小になるものを探すと、という問題になる。

このような $L(c)$ を最小にする曲線が $\frac{dc}{dt} \neq 0$ となることがわかっているとすると、実際に最小を与える曲線 c に対し、 c のパラメータを取り替えたものも $L(c)$ を最小にする。すなわち、 $\tau: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ が $\tau(0) = 0$, $\tau(1) = 1$, $\frac{d\tau}{ds} > 0$ を満たしていれば、 $L(c) = L(c \circ \tau)$ である。特に、速さを一定にするために、 $\sigma(t) = \frac{1}{L(c)} \int_0^t \sqrt{\sum g_{ij} \frac{dc_i}{dt} \frac{dc_j}{dt}} dt$ とし、 τ を σ の逆関数とする

と、 $\sqrt{\sum g_{ij} \frac{dc_i}{dt} \frac{dc_j}{dt}} = L(c)$ で一定となる。

このとき、 $(\int_0^1 \sqrt{\sum g_{ij} \frac{dc_i}{dt} \frac{dc_j}{dt}} dt)^2 = \int_0^1 \sum g_{ij} \frac{dc_i}{dt} \frac{dc_j}{dt} dt$ である。

一般に、作用と呼ばれる積分 $A(c) = \int_0^1 \sum g_{ij} \frac{dc_i}{dt} \frac{dc_j}{dt} dt$ を考えると、 $L(c)^2 \leq A(c)$ が成立する。実際、 $[0, 1]$ 上の実数値連続関数 f, g に対し、内積 $f \cdot g = \int_0^1 f(t)g(t) dt$ が考えられるが、これに対するシュワルツの不等式 $(f \cdot g)^2 \leq (f \cdot f)(g \cdot g)$ について、 $g = 1$, $f = \sqrt{\dots}$ とすればわかる。

さて、問題を取り替えて、 $A(c)$ の最小値を与える $c(t)$ を求め、その $c(t)$ に対して、 $q(\frac{dc}{dt}) = \sum g_{ij} \frac{dc_i}{dt} \frac{dc_j}{dt}$ が一定であることがわかれば、これは左辺の最小値が $\frac{dc}{dt} \neq 0$ となる $c(t)$ によって与えられるならば、 $L(c)$ の最小値を与えている。

$A(c) = \int_0^1 \sum_{i,j} g_{ij} \frac{dc_i}{dt} \frac{dc_j}{dt} dt$ が曲線 c を変化させたときの最小となっているための必要条件を調べる。そのために、 C^∞ 写像 $\epsilon: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^n$ で $\epsilon(0) = \epsilon(1) = 0$ となるものをとる。十分小さい s に対し $c(t) + s\epsilon(t) \in V$ であるから、 $A(c + s\epsilon)$ 定まるが、 s の関数として $s = 0$ のときに、最小値 $A(c)$

をとることを仮定している。

$$A(c + s\varepsilon) = \int_0^1 \sum_{i,j} g_{ij}(c(t) + s\varepsilon(t)) \frac{d(c_i + s\varepsilon_i(t))}{dt} \frac{d(c_j + s\varepsilon_j(t))}{dt} dt$$

であるから、

$$\begin{aligned} & \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} A(c + s\varepsilon) \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{i,j,k} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \varepsilon_k(t) \frac{dc_i}{dt} \frac{dc_j}{dt} + 2 \sum_{i,j} g_{ij} \frac{dc_i}{dt} \frac{d\varepsilon_j}{dt} \right) dt \end{aligned}$$

の値が 0 でなければならない。第 2 項を部分積分すると

$$\int_0^1 \sum_{i,j} g_{ij} \frac{dc_i}{dt} \frac{d\varepsilon_j}{dt} dt = \left[\sum_{i,j} g_{ij} \frac{dc_i}{dt} \varepsilon_j \right]_0^1 - \int_0^1 \sum_j \frac{d}{dt} \left\{ \sum_i g_{ij} \frac{dc_i}{dt} \right\} \varepsilon_j dt$$

であるが、添え字を付け替えて代入すると、

$$\int_0^1 \sum_k \left\{ \sum_{i,j} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \frac{dc_i}{dt} \frac{dc_j}{dt} - 2 \sum_i \frac{d}{dt} \left(g_{ik} \frac{dc_i}{dt} \right) \right\} \varepsilon_k(t) dt = 0$$

となるが、これが ε のとり方によらず成立している。このとき、中括弧の中 $\{\dots\} = 0$ でなければならない。実際、一般の $[0, 1]$ 上の \mathbf{R}^n 値 C^∞ 級関数 f, g に対し、内積 $f \bullet g = \int_0^1 \sum_i f_i(t) g_i(t) dt$ が考えられるが、 $f(t_0) \neq 0$ ならば、 $g(0) = g(1) = 0, f \bullet g > 0$ となるような g を、台が t_0 の近傍にある関数を用いて作ることが出来る。従って、各 k に対し、

$$\sum_{i,j} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \frac{dc_i}{dt} \frac{dc_j}{dt} - 2 \sum_i \frac{d}{dt} \left(g_{ik} \frac{dc_i}{dt} \right) = 0$$

あるいは、

$$\sum_{i,j} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \frac{dc_i}{dt} \frac{dc_j}{dt} - 2 \sum_{i,j} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} \frac{dc_j}{dt} \frac{dc_i}{dt} - 2 \sum_i g_{ik} \frac{d^2 c_i}{dt^2} = 0$$

すなわち、

$$\sum_i g_{ik} \frac{d^2 c_i}{dt^2} = \sum_{i,j} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} \right) \frac{dc_j}{dt} \frac{dc_i}{dt}$$

さらに、 g^{ij} を g_{ij} の逆行列として、 $\sum_k g^{\ell k} g_{kj} = \delta_{\ell j}$ 、 g_{ij} は対称行列だから、 g^{ij} も対称行列であることに注意して、

$$\frac{d^2 c_\ell}{dt^2} = \sum_{i,k} g^{k\ell} g_{ik} \frac{d^2 c_i}{dt^2} = \sum_k g^{k\ell} \sum_{i,j} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} \right) \frac{dc_j}{dt} \frac{dc_i}{dt}$$

のように正規形の2階の常微分方程式に書く。これが $A(c)$ が最小になるための c が満たすべき、必要条件である。この必要条件の常微分方程式を満たす曲線 c を測地線と呼ぶ。

うまい具合にこの常微分方程式の解 c に対して、 $q\left(\frac{dc}{dt}\right) = \sum g_{ij} \frac{dc_i}{dt} \frac{dc_j}{dt}$ が一定であることがわかる。実際、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum_{i,j} g_{ij} \frac{dc_i}{dt} \frac{dc_j}{dt} &= \sum_{i,j,k} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \frac{dc_k}{dt} \frac{dc_i}{dt} \frac{dc_j}{dt} + 2 \sum_{i,j} g_{ij} \frac{dc_i}{dt} \frac{d^2 c_j}{dt^2} \\ &= \sum_{i,j,k} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \frac{dc_k}{dt} \frac{dc_i}{dt} \frac{dc_j}{dt} + 2 \sum_j \sum_{i,k} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \right) \frac{dc_k}{dt} \frac{dc_i}{dt} \frac{dc_j}{dt} = 0 \end{aligned}$$

となる。この $A(c)$ が最小値であって、 $L(c)$ の最小値が $\frac{dc}{dt} \neq 0$ となる $c(t)$ によって与えられるならば、 $L(c)$ の最小値を与えている。

7.4 局所的最短性

$V \subset \mathbf{R}^n$ 上で定義された正規形の2階の常微分方程式は、 $V \times \mathbf{R}^n$ 上の正規形の1階の常微分方程式に書き直される。初期値は $c(0) = \mathbf{x} \in V$ 、 $\frac{dc}{dt}(0) = \mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$ として与えられる。そのような初期値をもつ解 $c: (\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow V$ は十分小さい ε に対し存在する。また、 $c(t)$ が (\mathbf{x}, \mathbf{v}) を初期値とする解のとき $a \in \mathbf{R}_{>0}$ に対し、 $c(at)$ は $(-\frac{\varepsilon}{a}, \frac{\varepsilon}{a})$ 上で定義された $(\mathbf{x}, a\mathbf{v})$ を初期値とする解となる。実際、

$$\begin{aligned} \sum_i g_{ik}(c(at)) \frac{d^2 c_i(at)}{dt^2} &= \sum_i a^2 g_{ik}(c(at)) \frac{d^2 c_i}{dt^2}(at), \\ \sum_{i,j} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}(c(at)) - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j}(c(at)) \right) \frac{dc_j(at)}{dt} \frac{dc_i(at)}{dt} \\ &= \sum_{i,j} a^2 \left(\frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}(c(at)) - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j}(c(at)) \right) \frac{dc_j}{dt}(at) \frac{dc_i}{dt}(at) \end{aligned}$$

だから、 $c(at)$ も解となる。

$V \times \mathbf{R}^n$ 上の初期値を (\mathbf{x}, \mathbf{X}) とする解は $(c(t, \mathbf{x}, \mathbf{X}), \frac{dc}{dt}(t, \mathbf{x}, \mathbf{X}))$ の形のものである。1階の常微分方程式を $V \times \mathbf{R}^n$ 上のベクトル場として書くと、座標

$$\sum_i X_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_x \mapsto (x_1, \dots, x_n, X_1, \dots, X_n)$$

について、

$$\left\{ \sum_k g^{k\ell} \sum_{i,j} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} \right) X_i X_j \right\} \frac{\partial}{\partial X_\ell} + \sum_i X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

と書かれる。このベクトル場が生成するフロー F は、 $V \times \mathbf{R}^n$ のコンパクト集合 K 上の点を初期値として、 t が十分小さいときに定義されている： $F : (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \times K \rightarrow V \times \mathbf{R}^n$ 。 $F(t, \mathbf{x}, 0) = \mathbf{x}$ であり、 $(\mathbf{x}, 0) \in \text{int } K$ とする。 $F(at, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = F(t, \mathbf{x}, a\mathbf{v})$ である。従って、0の近傍の \mathbf{v} に対しては $E_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}) = F(1, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ が定義される。この $E_{\mathbf{x}} : \mathbf{v} \mapsto F(1, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ は $0 \in \mathbf{R}^n$ の近傍から \mathbf{x} の近傍への微分同相写像となる。実際、

$$\begin{aligned} & \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} (F(1, \mathbf{x}, a\mathbf{v}) - F(1, \mathbf{x}, 0)) \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} (F(1, \mathbf{x}, a\mathbf{v}) - F(1, \mathbf{x}, 0)) \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} (F(a, \mathbf{x}, \mathbf{v}) - F(0, \mathbf{x}, \mathbf{v})) = \left. \frac{dF(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})}{dt} \right|_{t=0} = \mathbf{v} \end{aligned}$$

であるから、 $D(E_{\mathbf{x}})_{(0)} = \text{id}$ である。従って、逆写像定理により、 $E_{\mathbf{x}}$ は $0 \in \mathbf{R}^n$ の近傍から $\mathbf{x} \in V$ の近傍への微分同相写像である。

問 7.4.1. 3次元ユークリッド空間 \mathbf{R}^3 内の単位球面を $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ とする。 S^2 上の2点を結ぶ S^2 上の曲線で長さが最小のものは、原点を通る平面と S^2 の交わり(大円)上の弧であることを示せ。

ヒント：1点を通る大円の族、1点を中心とする小円の族を考える。

さて、 $H(t, s) = E_{\mathbf{x}}(tv(s)) = F(1, \mathbf{x}, tv(s)) = F(t, \mathbf{x}, v(s))$ を考える。但し $q(v(s)) = g(v(s)) = \sum g_{ij}(\mathbf{x}) v_i(s) v_j(s) = 1$ とする。ここで、 $\frac{\partial H}{\partial s}$ と $\frac{\partial H}{\partial t}$

の内積を考えたい。そこで、

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{i,j} g_{ij}(H(t,s)) \frac{\partial H_i}{\partial t} \frac{\partial H_j}{\partial s} \right) \\
 &= \sum_j \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_i g_{ij}(H(t,s)) \frac{\partial H_i}{\partial t} \right) \frac{\partial H_j}{\partial s} + \sum_{i,j} g_{ij}(H(t,s)) \frac{\partial H_i}{\partial t} \frac{\partial^2 H_j}{\partial s \partial t} \\
 &= \sum_j \left(\frac{1}{2} \sum_{i,k} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} \frac{\partial H_i}{\partial t} \frac{\partial H_k}{\partial t} \right) \frac{\partial H_j}{\partial s} + \sum_{i,j} g_{ij}(H(t,s)) \frac{\partial H_i}{\partial t} \frac{\partial^2 H_j}{\partial s \partial t} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \left(\sum_{i,j} g_{ij}(H(t,s)) \frac{\partial H_i}{\partial t} \frac{\partial H_j}{\partial t} \right) = 0
 \end{aligned}$$

途中で、測地線の方程式を導いた途中の式を使った。最後の式は、測地線 $c(t)$ の $q\left(\frac{dc}{dt}\right) = g\left(\frac{dc}{dt}, \frac{dc}{dt}\right)$ が一定であることから、0 となるが、 $t=0$ のとき、 $\frac{\partial H}{\partial s} = 0$ であるから、 $\sum_{i,j} g_{ij}(H(t,s)) \frac{\partial H_i}{\partial t} \frac{\partial H_j}{\partial s} = 0$ が常に成立する。

さて、 $y = E_x(v)$ のとき、 $c(0) = x$, $c(1) = y$ に対し、 $c(s) = E_x(t(s)v(s))$ と書くことが出来る。このとき、 $H(t,s) = E_x(tv(s))$ とおいて、 $\frac{dc}{ds} = \frac{\partial H}{\partial t} \frac{dt}{ds} + \frac{\partial H}{\partial s}$ となるが、 $\frac{\partial H}{\partial t}$ と $\frac{\partial H}{\partial s}$ は直交する: $g\left(\frac{\partial H}{\partial t}, \frac{\partial H}{\partial s}\right) = 0$.

$$\sqrt{q\left(\frac{dc}{ds}\right)} \geq \sqrt{q\left(\frac{\partial H}{\partial t} \frac{dt}{ds}\right)} = \sqrt{\left(\frac{dt}{ds}\right)^2} = \left|\frac{dt}{ds}\right|$$

従って、 $\int_0^1 \sqrt{q\left(\frac{dc}{ds}\right)} ds \geq \left|\frac{dt}{ds}\right| ds \geq |t(1) - t(0)|$.

従って、 x と y を結ぶ測地線は、最短の曲線である。

7.5 測地流

ここで、多様体 M 上にリーマン計量が与えられている状況にもどる。 M の座標近傍系 $\{(U_k, \varphi_k)\}_k$ に対して、 $T_x M$ ($x \in U$) の基底 $\frac{\partial}{\partial x_i^{(k)}}$ が定まり、 $g_{ij}^{(k)}$ という形でリーマン計量が表示される。

$\gamma_{ab} = \varphi_a \varphi_b^{-1} : \varphi_b(U_a \cap U_b) \rightarrow \varphi_a(U_a \cap U_b)$ とおいて、 $\sqcup V_k \times \mathbf{R}^n$ に $(\gamma_{ab}, D\gamma_{ab})$ による同値関係を入れたものが TM であった。

座標近傍 (U_k, φ_k) に対し、 $\varphi(U_k) \times \mathbf{R}^n$ 上のベクトル場が定まるが、このベ

クトル場は、 $(\gamma_{ab}, D\gamma_{ab})_* : T(\varphi_b(U_a \cap U_b) \times \mathbf{R}^n) \rightarrow T(\varphi_a(U_a \cap U_b) \times \mathbf{R}^n)$ で写りあわなければならない。それは $A(c)$ が $c : [0, 1] \rightarrow M$ に対して定義されていて、 $c([0, 1]) \in U_a \cap U_b$ に対して $A(c)$ を最小にするものが、解となるものであるからである。

従って、測地線の方程式は、接束 TM 上のベクトル場として表示される。

ここでリーマン計量に付随する2次形式写像 $q : TM \rightarrow \mathbf{R}$ を考える。測地線 $c(t)$ について、前に計算したように $q\left(\frac{dc}{dt}\right)$ は一定である。

また、 $a \in \mathbf{R}_{>0}$ に対して、 $q^{-1}(a)$ は余次元1の部分多様体である。実際、 $q(av) = a^2q(v)$ だから $\frac{dq(av)}{da} = 2aq(v) \neq 0$ であるから、 $v \in T_x M$ が $\neq 0 \in T_x M$ を満たせば、 v は正則点である。さらに、 M がコンパクトならば $q^{-1}(a)$ はコンパクトである。

従って、 M がコンパクトならば $q^{-1}(a)$ はコンパクトで、コンパクト多様体上のベクトル場はフローを生成するから、 $F_t : q^{-1}(a) \rightarrow q^{-1}(a)$ が定義される。従って、 $F_t : TM \rightarrow TM$ がフローとして定義されていたことになる。

M をコンパクト連結多様体とすると、 M の2点 x, y に対し、曲線 $c : [0, 1] \rightarrow M$ で $c(0) = x, c(1) = y, \text{dist}(x, y) = L(c)$ となるものがある。

実は、リーマン多様体が距離空間として完備であれば、最短測地線が存在する。このときに、 $E_x : T_x M \rightarrow M$ は全射となる。

コンパクトな多様体はユークリッド空間へ埋め込まれるから、リーマン計量をもつが、リーマン計量の存在自体はもう少し簡明に証明できる。

有限群の作用を持つとき、その作用で不変なリーマン計量も存在する。

リーマン計量があることにより、関数の勾配ベクトル場が定義される。 $f : M \rightarrow \mathbf{R}$ に対し、任意の接ベクトル X に対し、 $Xf = g(X, \text{grad } f)$ となることにより定義される。

問 7.5.1. $\frac{1}{g(\text{grad } f, \text{grad } f)} \text{grad } f$ は、 $\text{grad } f = 0$ となる f の臨界点を除いて定義されている。このベクトル場の解曲線 $c(t)$ は定義されている限り、 $f(c(t_0 + t)) - f(c(t_0)) = t$ を満たす。

$f : M \rightarrow \mathbf{R}$ をモース関数とするとき、 f の臨界点の近傍で $f =$

$-x_1^2 - \cdots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \cdots + x_n^2$ となる座標近傍をとり、この近傍上で $g_{ij} = \delta_{ij}$ となるようなリーマン計量をとる。このとき、勾配ベクトル場は $-2x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - \cdots - 2x_\lambda \frac{\partial}{\partial x_\lambda} + 2x_{\lambda+1} \frac{\partial}{\partial x_{\lambda+1}} + \cdots + 2x_n \frac{\partial}{\partial x_n}$ となり、 $(e^{-2t}x_1, \dots, e^{-2t}x_\lambda, e^{2t}x_{\lambda+1}, \dots, e^{2t}x_n)$ の形の解曲線を持つ。 $f^{-1}(x^0 - \varepsilon)$, $f^{-1}(x^0 + \varepsilon)$ の間には、 (x_1, \dots, x_λ) 平面と $(x_{\lambda+1}, \dots, x_n)$ 平面を除いて対応がつく。この様子を、 $f^{-1}(x^0 - \varepsilon)$ と $f^{-1}(x^0 + \varepsilon)$ は初等手術で写りあうと呼ぶ。