２００３年度幾何学特別演習Ｉ演習問題　　４月９日

復習問題１． 2変数関数 $f(x,y)$ についての陰関数定理、平面から平面への写像についての逆写像定理を述べよ。

復習問題２． a, b, c を ± 1 とするとき、$ax^2+by^2+cz^2=1$ の概形を描け。

演習問題１（チェイン ルール）．$f:\mathbf{R}^m \longrightarrow \mathbf{R}^n$, $g:\mathbf{R}^\ell \longrightarrow \mathbf{R}^m$ はともに連続微分可能な写像とする。すなわち、$f(y)=(f_1(y_1,\dots,y_m),\dots,f_n(y_1,\dots,y_m))$, $g(x)=(g_1(x_1,\dots,x_\ell),\dots,g_m(x_1,\dots,x_\ell))$ の各成分が連続微分可能とする。f, g のヤコビ行列は $Df=\big(\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}\big)_{i=1,\dots,n;j=1,\dots,m}$, $Dg=\big(\dfrac{\partial g_j}{\partial x_k}\big)_{j=1,\dots,m;k=1,\dots,\ell}$ である。この時、合成写像 $f\circ g:\mathbf{R}^\ell \longrightarrow \mathbf{R}^n$ も連続微分可能な写像であることを示し、$f\circ g$ のヤコビ行列 $D(f\circ g)$ について $D(f\circ g)(x)=Df(g(x))Dg(x)$ を示せ。

演習問題２． 3次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ 内の点 P_1, ..., P_k と、それらの中の２点を結ぶ線分 $C_1=\overline{P_{i_1}P_{j_1}}$, ..., $C_m=\overline{P_{i_m}P_{j_m}}$ が与えられているとする。これらの線分はお互いに端点以外では交わらず、$\{P_1,\dots P_k\}$ と両端のみで交わるとする。(すべて $\mathbf{R}^3$ の部分集合と考える。) $\{P_1,\dots P_k\}$ とこれらの線分の和集合 X が、部分空間としての位相について１次元位相多様体となるための条件は何か。このとき、線分の個数と点の個数との間にはどのような関係があるか。

余裕があれば、P_1, ..., P_k の中の２点を結ぶ線分 $C_1=\overline{P_{i_1}P_{j_1}}$, ..., $C_m=\overline{P_{i_m}P_{j_m}}$ と、３点を頂点とする三角形 $T_1=\triangle P_{u_1}P_{v_1}P_{w_1},\dots,T_\ell=\triangle P_{u_\ell}P_{v_\ell}P_{w_\ell}$ が与えられ、これらの三角形の辺は、$C_1,\dots,C_m$ のどれかであり、三角形の内部と線分や $\{P_1,\dots P_k\}$ は交わらないとする。また、線分はお互いに端点以外では交わらず、$\{P_1,\dots P_k\}$ と両端のみで交わるとする。$\{P_1,\dots P_k\}$、線分、三角形の和集合 Y が部分空間としての位相について 2 次元位相多様体となるための条件を考えてみよ。

演習問題３．

(1)　$f:\mathbf{R}^2\longrightarrow\mathbf{R}$ を $f(x,y)=x^3-x+y^2$ で定義するとき、f のヤコビ行列を求めよ。

(2)　(1) の f について、$z\in\mathbf{R}$ の逆像 $f^{-1}(z)$ の各成分が滑らかな曲線となるための z の条件を求めよ。

(3)　$F:\mathbf{R}^3\longrightarrow\mathbf{R}^2$ を $F(x,y,z)=(x^3-zx+y^2,z)$ で定義するとき、F のヤコビ行列を求めよ。

(4)　(3) の F について、$(s,t)\in\mathbf{R}^2$ の逆像 $F^{-1}(s,t)$ の各成分が、滑らかな曲線となるための (s,t) の条件を求めよ。

但し、$\mathbf{R}^n$ の滑らかな曲線 C とは、C の各点 x に対し、x の近傍 U と C^∞ 級写像 $f:U\longrightarrow\mathbf{R}^{n-1}$ で、U 上で $\mathrm{rank}Df=n-1$, $U\cap C=f^{-1}(f(x))$ とするものがあることである。（1次元部分多様体であること）