# ２００３年度幾何学特別演習Ｉ演習問題　　６月１１日

**復習問題１．**（１）平面上あるいは空間上の正規形の１階常微分方程式とは何か。
（２）平面上あるいは空間上の正規形の１階常微分方程式の解の存在と一意性の定理を述べよ。

**復習問題２．** 次の常微分方程式を解け。但し、初期値は $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ とする。

$$(1) \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad (2) \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

**演習問題１．** コンパクト多様体 $M$ 上のフロー $\varphi_t$ を考える。
(1)　$x \in M$ に対し、$\varphi_t(x)$ が $t$ について定値写像ではないとする。このとき、ある実数 $T$ $(T \geqq 0)$ が存在し、「$\varphi_{t_1}(x) = \varphi_{t_2}(x)$ ならば、整数 $n$ があって、$t_2 - t_1 = nT$ となる」ことを示せ。
(2)　$x \in M$ に対し、$\varphi_t(x)$ を考える。$M$ の点 $y$ で、$y$ の任意の近傍 $U_y \subset M$ に対し、$\sup\{t \in \mathbf{R} \mid \varphi_t(x) \in U_y\} = +\infty$ となるものが存在することを示せ。

**演習問題２．** $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ は $(0, 0, 0)$ ではないとする。$\mathbf{R}^2$ 上の関数

$$f(x, y) = (2 + \cos y)(a \cos x + b \sin x) + c \sin y$$

は、$\mathbf{R}^2/(2\pi\mathbf{Z})^2$ 上の関数 $F : \mathbf{R}^2/(2\pi\mathbf{Z})^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ を定義する。$F$ の臨界点の個数が有限個であるための条件を述べよ。臨界点におけるヘッシアンが退化するかどうか調べよ。

**演習問題３．** $n$ 次元実ベクトル空間の開集合 $U$ 上の常微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{x} = F(t, \mathbf{x})$ に対し、$F(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(t, \mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_n(t, \mathbf{x}) \end{pmatrix}$ が $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ について ($t$ に対して一様に) リプシッツであるとし、このような常微分方程式の解の存在と一意性、解の初期値やパラメータに対する連続性はわかっているとする。
さらに、$F(t, \mathbf{x})$ は $\mathbf{x}$ について、$C^1$ 級であるとする。このとき、$t = t_0$ において初期値 $\mathbf{x}^0$ を持つ解 $\Phi(t, \mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t, \mathbf{x}^0) \\ \vdots \\ \varphi_n(t, \mathbf{x}^0) \end{pmatrix}$ は、初期値 $\mathbf{x}^0$ について $C^1$ 級で、$A_{ij}(t, \mathbf{x}^0) = \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_j^0}(t, \mathbf{x}^0)$ は $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A_{ij}(t, \mathbf{x}^0) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_k}{}_{(t, \Phi(t, \mathbf{x}^0))} A_{kj}(t, \mathbf{x}^0)$ を満たすことを示せ。

ヒント：$F(t, \mathbf{x} + \mathbf{v}) - F(t, \mathbf{x}) = \sum v_i G_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ とする連続関数 $G_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = \begin{pmatrix} G_{i1}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) \\ \vdots \\ G_{in}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) \end{pmatrix}$ が存在する（5 月 21 日復習問題２）。さらに、$G_i(t, \mathbf{x}, 0) = \dfrac{\partial F}{\partial x_i}(t, \mathbf{x}, 0)$ である。$(s, \dfrac{1}{s}(\Phi(t, \mathbf{x}^0 + s\mathbf{v}) - \Phi(t, \mathbf{x}^0)))$ の満たす常微分方程式についての解の存在と一意性、解のパラメータに対する連続性を用いる。