２００３年度幾何学特別演習Ｉ演習問題　　６月２５日

復習問題１． G が群であるとはどういうことか。　群 G の位相空間 X への作用とは何か。

復習問題２． C^r 級関数 $f(x)$ に対するテーラーの定理を $f(x)-\displaystyle\sum_{k=0}^{r-1}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = R_r(x)$ とするとき、$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{R_r(x)}{x^r} = r!f^{(r)}(0)$ と理解することにする。

(1) C^∞ 級関数 $f(x)$ に対し、多項式 $P(x)$ が $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{|f(x)-P(x)|}{x^{r-1}} = 0$ を満たすならば、$P(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{r-1}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$ となることを示せ。

(2) C^∞ 級関数 $f(x),\ g(x)$ に対し、多項式 $P(x),\ Q(x)$ が $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{|f(x)-P(x)|}{x^{r-1}} = 0$, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{|g(x)-Q(x)|}{x^{r-1}} = 0$ を満たし、$g(0)=0$ とすると、$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{|(f\circ g)(x)-(P\circ Q)(x)|}{x^{r-1}} = 0$ となることを示せ。

(*) (1), (2) を C^∞ 級関数 $f:\mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$, C^∞ 級写像 $g:\mathbf{R}^m \longrightarrow \mathbf{R}^n$ に対し、拡張せよ。

復習問題３． $X:\mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ をリプシッツ連続写像とする。n 次元実ベクトル空間上の常微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{x} = X(\mathbf{x})$ の解 $F(t,\mathbf{x})$ ($F(0,\mathbf{x})=\mathbf{x}$) は初期値 $\mathbf{x}$ に対し、リプシッツ連続であることを示せ。

演習問題． $\mathbf{C}P^n = (\mathbf{C}^{n+1}-\{0\})/\mathbf{C}^\times$ を n 次元複素射影空間とすると、$\mathbf{C}P^n$ は実 $2n$ 次元 C^∞ 級多様体である。

(1) 結合写像
$$S^{2n+1} \longrightarrow \mathbf{C}^{n+1}-\{0\} \longrightarrow \mathbf{C}P^n$$
の rank を求めよ.

(2)　$f(z_1,...,z_{n+1}) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}k|z_k|^2 \Big/ \sum_{k=1}^{n+1}|z_k|^2$ で定義される関数 $f:C^{n+1}-\{0\}\longrightarrow \mathbf{R}$ は $\mathbf{C}P^n$ 上の C^∞ 級関数 F を誘導することを示せ.

(3)　F の臨界点 ($F_*:T_x\mathbf{C}P^n \longrightarrow \mathbf{R}$ が 0 となる点 x) を求めよ。
ヒント：合成写像 $T_zS^{2n+1} \longrightarrow T_x\mathbf{C}P^n \longrightarrow \mathbf{R}$ が 0 でない点 z の定める点 $x=[z]$ は正則点である。

(4)　F の臨界点におけるヘッセ行列を求めよ。
ヒント：復習問題２。