２００３年度幾何学特別演習Ｉ演習問題　　４月１６日

復習問題１．関数 $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}$, 写像 $F : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ に対しての陰関数定理を述べよ。

復習問題２．写像 $f : \mathbf{R}^m \longrightarrow \mathbf{R}^n$ が C^r 級であることの定義を述べよ。

演習問題１．$f : \mathbf{R}^m \longrightarrow \mathbf{R}^n$, $g : \mathbf{R}^\ell \longrightarrow \mathbf{R}^m$ を C^∞ 級の写像とするとき、$f \circ g : \mathbf{R}^\ell \longrightarrow \mathbf{R}^n$ は C^∞ 級の写像であることを示せ。
ヒント：C^{r-1} 級の写像の和、積は C^{r-1} 級。f が C^r 級写像ならば、Df は C^{r-1} 級。チェインルールを使う。

演習問題２．$\mathbf{R}^3$ の次の部分集合が滑らかな曲面であるかどうか論ぜよ。

$$C = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 = z^2\right\}$$

$$X = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{r} z^2 = -\{x^2 + y^2 - 1\}\{(x+3)^2 + y^2 - 1\}\cdot \\ \{(x-3)^2 + y^2 - 1\}\{x^2 + y^2 - 25\} \end{array}\right\}$$

$$Y = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; z^2 = -\{(x+1)^2 + y^2 - 1\}\{(x-1)^2 + y^2 - 1\}\right\}$$