２００２年度幾何学特別演習Ｉ演習問題　　５月７日

復習問題１． コンパクト空間 X からハウスドルフ空間 Y への連続な全単射 h は同相写像であることを示せ。

復習問題２． ３次元ユークリッド空間上の C^∞ 級関数 $F(x,y,z)$ により、$F(x,y,z)=c$ によって定義される曲面（等位面）S_c が与えられているとする。（$DF \neq 0$ が S_c 上で成立しているとする。）空間曲線 $(a,b) \ni t \longmapsto (\xi(t),\eta(t),\zeta(t))$ の接ベクトルが、すべての t に対し、$F(x,y,z)$ の等位面の $(\xi(t),\eta(t),\zeta(t))$ における接平面に含まれることと、空間曲線が一つの等位面 S_c に含まれることは同値であることを示せ。

演習問題１．

(1)　$\mathbf{R}P^n = (\mathbf{R}^{n+1} - \{0\})/\mathbf{R}^\times$ はハウスドルフ空間であることを示せ。

（ヒント：$\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{n+1} - \{0\}$ に対し、$f_{\mathbf{x}} : \mathbf{y} \longmapsto \dfrac{|\mathbf{x} \bullet \mathbf{y}|}{\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|}$ を考え、２点は関数で分離できることを示す。但し $\mathbf{x} \bullet \mathbf{y}$ は内積を表す。シュワルツの不等式に注意する。）

(2)　$\mathbf{R}P^n$ は n 次元 C^∞ 級多様体であることを示せ。

演習問題２．

(1)　$\mathbf{C}P^n = (\mathbf{C}^{n+1} - \{0\})/\mathbf{C}^\times$ はハウスドルフ空間であることを示せ。

（ヒント：$\mathbf{x} \in \mathbf{C}^{n+1} - \{0\}$ に対し、$f_{\mathbf{x}} : \mathbf{y} \longmapsto \dfrac{|\mathbf{x} \bullet \mathbf{y}|}{\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|}$ を考え、２点は関数で分離できることを示す。但し $\mathbf{x} \bullet \mathbf{y}$ はエルミート内積を表す。シュワルツの不等式に注意する。）

(2)　$\mathbf{C}P^n$ は $2n$ 次元 C^∞ 多様体であることを示せ。

演習問題３． 一般に位相空間 X の同相写像の有限集合 $F = \{f_i \mid i \in I\}$ が、写像の結合、逆写像をとる操作について、閉じているときに F を位相空間 X の有限変換群という。位相空間 X の有限変換群 $F = \{f_i \mid i \in I\}$ に対し、X 上の同値関係を、

$$x \sim y \iff F \text{ のある元 } f_i \text{ に対し、} f_i(x) = y$$

となることと定義する。この同値類の集合を X/F と書く。ハウスドルフ位相空間 X の有限変換群 F について X/F がハウスドルフ空間となることを示せ.