２００３年度幾何学特別演習Ｉ演習問題　　５月１４日

復習問題　１． (1) $n \geqq 0$ を整数とするとき、$\displaystyle\lim_{x \searrow 0} \frac{1}{x^n} e^{-\frac{1}{x}} = 0$ を示せ。

($y > 0$ のとき、$e^y > \dfrac{y^n}{n!}$ を使っても良い。)

(2) 連続関数 $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbf{R}$ が、$(0, \infty)$ で微分可能かつ導関数 $f'(x)$ が $(0, \infty)$ で連続とする。$\displaystyle\lim_{x \searrow 0} f'(x)$ が存在するならば、$\displaystyle\lim_{x \searrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ は存在し、$\displaystyle\lim_{x \searrow 0} f'(x)$ に等しいことを示せ。　（平均値の定理）

復習問題　２． (1) 関数 $\rho : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ を $\rho(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & (x > 0) \\ 0 & (x \leqq 0) \end{cases}$ で定義すると、ρ は C^∞ 級であることを示せ。

（ρ の m 回微分した式の形が (1) の形の式の１次結合となることを示す。）

(2) C^∞ 級の単射 $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^2$ で、$f(\mathbf{R}_{>0}) = \mathbf{R}_{>0} \times \{0\}$, $f(\mathbf{R}_{<0}) = \{0\} \times \mathbf{R}_{<0}$ を満たすものを構成せよ。（同じように $\mathbf{R}^n$ の連結な折れ線は $\mathbf{R}$ からの C^∞ 級写像の像となる。）

演習問題． n 次元 C^∞ 級多様体 M の座標近傍系 $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ について、座標変換 $g_{ij} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$ は $g_{ij} = \varphi_i \circ (\varphi_j | U_i \cap U_j)^{-1}$ で定義される。

(1)　$\varphi_k(U_i \cap U_j \cap U_k)$ 上で、$g_{ij} \circ g_{jk} = g_{ik}$ を満たすことを示せ。

$V_i = \varphi_i(U_i) \subset \mathbf{R}^n$ と置く。g_{ii} は V_i の恒等写像 id_{V_i} とする。また $V_{ij} = \varphi_j(U_i \cap U_j) \subset V_j$, $V_{ji} = \varphi_i(U_i \cap U_j) \subset V_i$ とおくと、$g_{ij} : V_{ij} \longrightarrow V_{ji}$ は $\mathbf{R}^n$ の開集合の間の微分同相写像である。(1) の関係式は、$V_{ik} \cap V_{jk} \xrightarrow{g_{jk}} V_{ij} \cap V_{kj} \xrightarrow{g_{ij}} V_{ji} \cap V_{ki}$ の結合が $V_{ik} \cap V_{jk} \xrightarrow{g_{ik}} V_{ji} \cap V_{ki}$ に等しいというものである。さらに $V_{ii} = V_i$ と置くと、i, j, k のうちの２つが等しい場合にも成立している。

(2)　一般に V_i を $\mathbf{R}^n$ の開集合とする。$\{V_i\}_{i \in I}$ の disjoint union $\displaystyle\bigsqcup_{i \in I} V_i$ の定義を述べよ。

$V_i \subset \mathbf{R}^n$, $V_{ji} \subset V_i = V_{ii}$ を開集合、$g_{ij} : V_{ij} \longrightarrow V_{ji}$ を C^∞ 級写像で、$g_{ii} = \mathrm{id}_{V_i}$, $g_{jk}(V_{ik} \cap V_{jk}) = V_{ij} \cap V_{kj}$ かつ $V_{ik} \cap V_{jk}$ 上で、$g_{ij} \circ g_{jk} = g_{ik}$ を満たすとする。

(3)　$\displaystyle\bigsqcup_{i \in I} V_i$ 上の、次の関係 $\sim$ は同値関係であることを示せ。

$x_i \in V_i$, $x_j \in V_j$ に対し、　$x_i \sim x_j \iff x_j \in V_{ij} \subset V_j$ かつ $x_i = g_{ij}(x_j)$

(4)　$X = (\displaystyle\bigsqcup_{i \in I} V_i) / \sim$ を商空間とする。X がハウスドルフ空間であると仮定すると、X は n 次元 C^∞ 級多様体となることを示せ。

(5)　n 次元 C^∞ 級多様体 M の座標近傍系 $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ から最初に定義した V_i, V_{ij} について、上で構成した X は M と微分同相であることを示せ。