２００３年度幾何学特別演習Ｉ演習問題　　５月２１日

復習問題１． X, Y を実ベクトル空間とする。
(1) 実ベクトル空間の次元の定義を述べよ。
(2) 線形写像 $X \longrightarrow Y$ の階数 (rank) の定義を述べよ。

復習問題２． ユークリッド空間上の C^∞ 級関数 $f(x_1, \ldots, x_n)$ に対し、次を満たす C^∞ 級関数 $g_1(x_1, \ldots, x_n)$, ..., $g_n(x_1, \ldots, x_n)$ が存在することを示せ。

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(0, \ldots, 0) + x_1 g_1(x_1, \ldots, x_n) + \cdots + x_n g_n(x_1, \ldots, x_n)$$

このとき、$\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(0, \ldots, 0) = g_k(0, \ldots, 0)$ となる。
ヒント：$f(x_1, \ldots, x_n) - f(0, \ldots, 0) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}f(tx_1, \ldots, tx_n)}{\mathrm{d}t}\mathrm{dt}$

演習問題１． 位相空間 E, B の間に連続写像 $p : E \longrightarrow B$ があって、次の条件を満たすとする。ある位相空間 F があって、B の各点 b に対し、b の開近傍 U_b を選べば、同相写像 $h : p^{-1}(U_b) \longrightarrow U_b \times F$ で、$\mathrm{pr}_1 \circ h = p$ を満たすものが存在する。ここで pr_1 は第１成分への射影 $U_b \times F \longrightarrow U_b$ である。
B, F がハウスドルフ空間であると仮定すると、E もハウスドルフ空間となることを示せ。

演習問題２． (1) $GL(n; \mathbf{R})$ は、n^2 次元 C^∞ 級多様体であることを示せ。$SL(n; \mathbf{R})$ は、$GL(n; \mathbf{R})$ の $n^2 - 1$ 次元 C^∞ 級部分多様体であることを示せ。
ヒント：陰関数定理。det の微分が $\det = 1$ の点で 0 でないことを、行列式の行あるいは列による展開を用いて示す。
(2) 行列の積 $GL(n; \mathbf{R}) \times GL(n; \mathbf{R}) \longrightarrow GL(n; \mathbf{R})$, 逆行列をとる操作 $GL(n; \mathbf{R}) \longrightarrow GL(n; \mathbf{R})$ は、C^∞ 級の写像であることを確認し、$SL(n; \mathbf{R})$ に対しても、それぞれの操作が C^∞ 級であることを示せ。

演習問題３． 複素射影曲線 $\mathbf{C}P^1 = (\mathbf{C}^2 - \{0\})/\mathbf{C}^\times$ と、（２次元）球面 $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \,|\, {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 = 1\}$ は微分同相であることを示せ。
ヒント：S^2 について、$(0, 0, 1)$ からの stereographic projection p_+ および $(0, 0, -1)$ からの stereographic projection p_- により、座標近傍系を定義する。
ただし、$p_\pm : S^2 - \{(0, 0, \pm 1)\} \longrightarrow \mathbf{R}^2 = \mathbf{R}^2 \times \{0\}$ は $(0, 0, \pm 1)$, $\mathbf{x}$, $(p_\pm(\mathbf{x}), 0)$ が同一直線上にあることにより定義される。
(*)　(暇な時に考える問題) stereographic projection は S^2 上の円を $\mathbf{R}^2$ の円または直線に写すことを示せ。