２００３年度幾何学特別演習Ｉ演習問題　　５月２８日

復習問題１． コンパクトハウスドルフ空間 X は正規空間であることを示せ。
すなわち、$A_1,\ A_2$ を X の閉集合、$A_1 \cap A_2 = \emptyset$ とするとき、開集合 $U_1,\ U_2$ で、$A_1 \subset U_1,\ A_2 \subset U_2,\ U_1 \cap U_2 = \emptyset$ となるものが存在することを示せ。

復習問題２． コンパクトハウスドルフ空間 X の開被覆 $\{U_i\}$ に対し、X の開被覆 $\{V_i\}$ で、$\overline{V}_i \subset U_i$ となるものが存在することを示せ。

演習問題１． $SO(3) = \{A \in M(3;\mathbf{R}) \,\big|\, {}^t AA = I,\ \det A = 1\}$ は多様体であることをしめせ.

演習問題２． G は群であり、n 次元 C^∞ 級多様体でもあるとする。群の演算 $G \times G \longrightarrow G$ が C^∞ 級写像であると仮定する。

(1). $G \ni h \longmapsto gh \in G$ を L_g と書くと、L_g は C^∞ 級微分同相であることを示せ。

(2). 群の演算 $G \times G \longrightarrow G$ の接写像 $T_{(g,h)}(G \times G) \longrightarrow T_{gh}G$ のランクを求めよ。

ヒント：c_g を g に値をとる定値写像とし、$G \xrightarrow{(c_g, L_h)} g \times G \subset G \times G \xrightarrow{\text{演算}} G \xrightarrow{L_{(gh)^{-1}}} G$ の接写像のランクを考える。

(3). 群の逆元をとる演算 $G \longrightarrow G$ は C^∞ 級であることを示せ。

演習問題３． n 次元 C^∞ 級多様体 M の p における方向微分とは多様体 M 上の滑らかな関数のなす実ベクトル空間 $C^\infty(M)$ 上の線形形式 D で、

$$D(f \cdot g) = Df \cdot g(p) + f(p) \cdot Dg$$

を満たすものである。

(1). p における方向微分の全体 $\mathcal{D}_p$ は実ベクトル空間をなすことを示せ。

(2). M 上の曲線 $c(t)$ で $c(0) = p$ となるものに対して、$C^\infty(M) \ni f \longmapsto D_c(f) = \dfrac{\mathrm{d}(f \circ c)}{\mathrm{d}t}(0)$ とおくと、D_c は p における方向微分であることを示せ。

(3). p のまわりの座標近傍 $(U, \varphi) = (U, (x_1, \dots, x_n))$ に対し、曲線
$t \longmapsto \varphi^{-1}(0, \dots, 0, t, 0, \dots, 0)$ (k 番目の座標) に対する方向微分を $\dfrac{\partial}{\partial x_k}$ と書くとき、$\{\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial}{\partial x_n}\}$ が $\mathcal{D}_p$ の基底となることを示せ。

ヒント：定数 1 に対して、$D(1) = D(1) + D(1)$ だから $D(1) = 0$. また、p の近傍で 0 となる関数 f について、その近傍上でのみ 0 でない関数 g をとると $Df = D(f \cdot g) = Df \cdot g(p) + f(p) \cdot Dg = Df \cdot g(p)$ だから $Df = 0$ がわかる。従って、Df は f の p の近傍での値のみにより定まっている。また、p の近傍 U で定義された任意の関数 f に対し、p の近傍 V $(\subset U)$ 上で、f に一致する M 上の C^∞ 級関数があることは使ってよいことにする。５月２１日復習問題２を使い、$D(x_k)$ の値により、$D = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} D(x_k) \frac{\partial}{\partial x_k}$ を導く。