２００３年度幾何学特別演習Ｉ演習問題　　６月４日

復習問題１． n 次元ユークリッド空間の部分集合 A が、測度０であることの定義を述べよ。

復習問題２． (1) 実数直線の部分集合としてのカントールの３進集合の構成を述べよ。
(2) このカントールの３進集合は測度０であることを示せ。

暇な時に考えること：(*) 実数直線の部分集合でカントールの３進集合と同相なもので測度０でないものはあるか。

クイズ． 長さ 2π の単位円周 S^1 の回転 $2\pi\alpha$ 回転 R_α は、長さ ε の円弧を長さ ε の円弧に写す。S^1 の点 p に R_α または ${R_\alpha}^{-1}$ を何度も施して得られる点の集合 $X = \{{R_\alpha}^n(p) \mid n \in \mathbf{Z}\}$ を考える。α が無理数の時、X は S^1 で稠密であることを示せ。

ヒント：$S^1 \neq X$ とすると、$S^1 - \overline{X}$ は開区間の集まりだから、その開区間のなかで長さが最大のもの J をとり、それが長さ ε であるとする。${R_\alpha}^n(J) \subset S^1 - \overline{X}$ である。$\varepsilon > 2\pi/m$ となる整実数 m に対し、$\{{R_\alpha}^n(J)\}_{n=1,\dots,m}$ は disjoint ではない。${R_\alpha}^i(J) \cap {R_\alpha}^j(J) \neq \emptyset$ だが、一方の区間の端点が他の区間の内点になることはない。このとき ${R_\alpha}^i = {R_\alpha}^j$ となってしまう。

演習問題１． n を正の整数とする。$f : M \longrightarrow \mathbf{R}$ を n 次元コンパクト C^∞ 級多様体上の C^∞ 級関数とする。$f_* : T_xM \longrightarrow \mathbf{R}$ について $f_* = 0$ を満たす M の点 x が、少なくとも２点存在することを示せ。

ヒント：コンパクト位相空間上の連続関数は最大値、最小値をもつ。

演習問題２． C^∞ 級多様体 X の部分多様体 Y, Z が横断的に交わるとは, すべての $x \in Y \cap Z$ について $T_xY + T_xZ = T_xX$ が成立することである。
X のコンパクト部分多様体 Y, Z が横断的に交わるとき, $Y \cap Z$ も X のコンパクト部分多様体になることを示せ.

ヒント：$x_0 \in Y \cap Z$ の近傍 U には、コンパクト部分多様体 Y, Z を定義する C^∞ 級写像 $U \longrightarrow \mathbf{R}^{\dim X - \dim Y}$, $U \longrightarrow \mathbf{R}^{\dim X - \dim Z}$ がある。