

サードの定理の証明の概略。Milnor: Topology from the differentiable viewpoint による。

(0) $A \subset \mathbf{R}^n$ が測度 0 であるとは、任意の正実数 ε に対し、次を満たす閉立方体の可算族 Q_i があること: $A \subset \bigcup_i Q_i$, Q_i の辺の長さを δ_i とするとき、 $\sum_i \delta_i^n \leq \varepsilon$ となる。

(1) \mathbf{R}^n の測度 0 の集合のリプシッツ同相写像による像は測度 0 である。従って、連続微分可能同相写像による像についても同様。

(2) これにより、微分可能多様体の部分集合が測度 0 であることが定義される。また、サードの定理は、滑らかな写像 $F: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n$ に対して示せばよい。

(3) サードの定理は、 $m < n$ に対して正しい。

(4) F の臨界点の集合を C とする。 $C = \{x \in \mathbf{R}^m \mid \text{rank} T_x F < n\}$. F の k 階の偏微分がすべて 0 となる点の集合を C_k とする: $C \supset C_1 \supset C_2 \supset \dots \supset C_k$.

(5) フビニの定理「 $A \cap \{x\} \times \mathbf{R}^{m-1} \subset \{x\} \times \mathbf{R}^{m-1}$ がすべての x に対し測度 0 ならば、 $A \subset \mathbf{R}^m$ が測度 0 となる。」を認める。

(6) 「 $F(C - C_1)$ は測度 0。」

$C - C_1$ の点 x の近傍で、 $F = (f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, \dots, x_m))$ の偏微分の 1 つは 0 とならない。 $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \neq 0$ のとき、座標の順序を入れ換えて、 $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \neq 0$ とする。逆写像定理から、この近傍で、 $h: (x_1, x_2, \dots, x_m) \mapsto (f_1, x_2, \dots, x_m)$ は、局所微分同相。 $F \circ h^{-1}$ は第 1 番目の座標が、恒等写像で、 $F(C - C_1) = (F \circ h^{-1})(h(C - C_1))$ である。 $F(C - C_1) \cap \{y_1\} \times \mathbf{R}^{n-1} = (F \circ h^{-1})(h(C - C_1)) \cap \{y_1\} \times \mathbf{R}^{n-1} = (F \circ h^{-1})(h(C - C_1) \cap \{x_1\} \times \mathbf{R}^{m-1})$. ここで $h(C - C_1) \cap \{x_1\} \times \mathbf{R}^{m-1}$ が $F \circ h^{-1}|_{\{x_1\} \times \mathbf{R}^{m-1}}$ の臨界点集合に含まれることがわかる。従って、低い次元のユークリッド空間の間の写像 $\mathbf{R}^{m-1} \rightarrow \mathbf{R}^{n-1}$ に対して、サードの定理が示されていれば、(5) から (6) が従う。

(7) 「 $k \geq 1$ のとき、 $F(C_k - C_{k+1})$ は測度 0。」

$C_k - C_{k+1}$ の点 x の近傍で、偏微分 $\frac{\partial^{k+1} f_i}{\partial x_{s_1} \partial x_{s_2} \dots \partial x_{s_{k+1}}}$ は 0 でないが、 $w(x) = \frac{\partial^{k+1} f_i}{\partial x_{s_2} \dots \partial x_{s_{k+1}}}$ は 0 である。座標の順序を入れ換えて、 $s_1 = 1$ とする。逆写像定理から、この近傍で、 $h: (x_1, x_2, \dots, x_m) \mapsto (w, x_2, \dots, x_m)$ は局所微分同相。 $h(C_k - C_{k+1}) \subset \{0\} \times \mathbf{R}^{m-1}$ であるが、 $h(C_k - C_{k+1})$ は $F \circ h^{-1}$ を $\{0\} \times \mathbf{R}^{m-1}$ に制限した写像の臨界点の集合 (の C_k) に含まれる。従って、低い次元のユークリッド空間からの写像 $\mathbf{R}^{m-1} \rightarrow \mathbf{R}^n$ に対して、サードの定理が示されていれば、(7) が従う。

(8) 「 $(k+1)n > m$ ならば、 $F(C_k)$ は測度 0。」

k 階偏微分がすべて 0 の点 x_0 の近傍の点 x_1 では、 $\|F(x_1) - F(x_0)\| \leq K \|x_1 - x_0\|^{k+1}$.

$[0, 1]^m$ を M^m の立方体に等分すると、 C_k と交わる小立方体は辺の長さが $(K \frac{1}{M})^{k+1}$ の M^m 個の立方体に含まれる。その体積 $K^{n(k+1)} \frac{M^m}{M^{n(k+1)}}$ は、 $(k+1)n > m$ のとき、分割を細かくすれば 0 に収束する。

(9) (3) により、帰納法 (6), (7) が成立している。

モース関数の存在。(1) ユークリッド空間 \mathbb{R}^n 上の関数 f を考える。 (a_1, \dots, a_n) に対し、 $L(x_1, \dots, x_n) = \sum_i a_i x_i$ と置く。 $f - L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ を考えると、 $f - L$ の臨界点 x は $T_x f = L$ となる x である。 $f - L$ の臨界点 x におけるヘッセ行列は $(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j})$ である。 $f - L$ が退化するヘッセ行列をもつことは、 $T_x f = L$ となる x で行列 $(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j})$ が定義する線形写像が全射でないことである。行列 $(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j})$ は写像 $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$ のヤコビ行列だから、 L は写像 $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$ の臨界値である。

サードの定理から、臨界値は測度 0 で、十分小さい L について、 $f - L$ はモース関数となる。

(2) モース関数に 2 階微分まで近い関数はモース関数である。

(3) コンパクト多様体 M 上の任意の関数 F を考える。座標近傍による有限被覆 U_i を取り、 $V_i \subset \bar{V}_i \subset U_i$ で、 $\{V_i\}$ が M の被覆となるものをとる。また、 V_i 上 1, $M - U_i$ 上 0 となる関数 μ_i を取る。

(3)-1 $F|_{U_1}$ に対し、 f_1 を $F|_{U_1}$ を近似する U_1 上のモース関数とすると、 $F_1 = \mu_1 f_1 + (1 - \mu_1)F$ は V_1 上でモース関数。

(3)-2 $F_1|_{U_2}$ に対し、 f_2 を $F_1|_{U_2}$ を近似する U_2 上のモース関数とすると、 $F_2 = \mu_2 f_2 + (1 - \mu_2)F_1$ は、 V_2 上でモース関数だが、 V_1 上でも F_1 を十分近似していればモース関数。

(3)- k 同様に、 $F_{k-1}|_{U_k}$ に対し、 f_k を $F_{k-1}|_{U_k}$ を近似する U_k 上のモース関数とすると、 $\mu_k f_k + (1 - \mu_{k-1})F_{k-1}$ は、 V_k 上でモース関数だが、 $V_1 \cup \dots \cup V_{k-1}$ 上でも F_{k-1} を十分近似していればモース関数。

モースの補題。

$(0, \dots, 0)$ を f の臨界点、 $(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j})(0, \dots, 0)$ は非退化とする。線形変換で $(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j})(0, \dots, 0)$ は対

角化されているとする。(少なくとも $(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1})(0, \dots, 0) \neq 0$ とする。)

前に復習の問題として出した表示 $f = x_1 g_1 + \dots + x_n g_n$ について、 $g_i(0, \dots, 0) = 0$ だから、 $g_i = x_1 h_{i1} + \dots + x_n h_{in}$ と書かれる。このとき、 $h_{ii} = (\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j})(0, \dots, 0) \neq 0$ 。

$f = \sum_{i,j=1}^n h_{ij} x_i x_j$ について順に平方完成を行う。 h_{ij} を $\frac{h_{ij} + h_{ji}}{2}$ におきかえて、 $h_{ij} = h_{ji}$ としてよい。 h_{11} は $(0, \dots, 0)$ の近傍で 0 でないから、

$f = h_{11}(x_1 + \frac{h_{12}}{2h_{11}}x_2 + \dots + \frac{h_{1n}}{2h_{11}}x_n)^2 + \sum_{i,j=2}^n h'_{ij} x_i x_j$ と変形される。

$y_1 = \sqrt{|h_{11}|}(x_1 + \frac{h_{12}}{2h_{11}}x_2 + \dots + \frac{h_{1n}}{2h_{11}}x_n)$ とおいて、 $(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (y_1, x_2, \dots, x_n)$ はヤコビ行列式が $\sqrt{|h_{11}|}$ だから局所微分同相である。これで座標変換すると、 $f = \text{sign}(h_{11})y_1^2 + \sum_{i,j=2}^n h'_{ij} x_i x_j$ と書かれる。但し、 h'_{ij} は (y_1, x_2, \dots, x_n) の関数の形に書き換わっている。

引き続き、 $\sum_{i,j=2}^n h'_{ij} x_i x_j$ について、 x_2, \dots, x_n についての線形変換で $h'_{22}(0, \dots, 0) \neq 0$ とする。 $h'_{22}(0, \dots, 0) \neq 0$ だから、平方完成を行って、 $y_2 = \sqrt{|h'_{22}|}(x_2 + \frac{h'_{23}}{2h'_{22}}x_3 + \dots + \frac{h'_{2n}}{2h'_{22}}x_n)$ を使って座標変換すると、 $f = \text{sign}(h_{11})y_1^2 + \text{sign}(h'_{22})y_2^2 + \sum_{i,j=3}^n h''_{ij} x_i x_j$ となる。以下同様。