２００３年度幾何学Ｉ　試験問題

２００３年9月２２日

１３：３０－１６：３０

問題１． ３次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ の部分空間について考える。

(1) $P = \{(x, y, z) \mid \frac{1}{z}$は整数$\}$ は $\mathbf{R}^3$ の２次元部分多様体かどうか論ぜよ。

(2) (1) の P に対し、$P \cup \{(x, y, 0) \mid x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$ は $\mathbf{R}^3$ の２次元部分多様体かどうか論ぜよ。

問題２． ２次元ユークリッド空間から原点を除いた空間 $A = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ 上の同値関係 $\sim$ を

$$(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow \exists n \in \mathbf{Z}, (x, y) = 2^n(x', y')$$

で定義する。$p : A \longrightarrow A/\sim$ を商空間への射影とする。

(1) 商空間 $A/\sim$ は２次元 C^∞ 多様体であることを示せ。

a, b を $ab \neq 0$ となる実数として、A 上のベクトル場 $ax\frac{\partial}{\partial x} + by\frac{\partial}{\partial y}$ を考える。

(2) $A/\sim$ 上のベクトル場 X で、$p_*(ax\frac{\partial}{\partial x} + by\frac{\partial}{\partial y}) = X$ となるものが存在することを示せ。

(3) X が生成するフローの閉軌道の個数について論ぜよ。

問題３． $S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$ とする。S^3 上の同値関係を

$$(z_1, z_2) \sim (w_1, w_2) \Leftrightarrow \exists u \in \mathbf{C}, |u| = 1, (z_1, z_2) = u(w_1, w_2)$$

で定義し、(z_1, z_2) の同値類を $[z_1, z_2]$ で表すことにする。$p : S^3 \longrightarrow \mathbf{C}P^1 = S^3/\sim$ を商空間への射影とする。S^3, $\mathbf{C}P^1$ は多様体となることは認める。このとき、p の接写像 $p_* : T_{(z_1,z_2)}S^3 \longrightarrow T_{[z_1,z_2]}\mathbf{C}P^1$ のランクを求めよ。

問題４． 平面上の直線全体のなす集合に出来るだけ自然な２次元 C^∞ 多様体の構造を与えよ。

問題５． C^∞ 多様体 M 上の点 x_0 と x_0 の近傍 U に対して、C^∞ 級関数 $f : M \longrightarrow \mathbf{R}$ で、任意の $x \in M$ に対し、$f(x) \geqq 0$ であり、$f(x_0) > 0$, $\{x \in M \mid f(x) \neq 0\} \subset U$ となるものがあることを示せ。