２００３年度幾何学Ｉ　追試験問題

２００３年１２月１０日

１５：３０－１８：３０

問題１． 3 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ 上の実数値関数 $F : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}$ を

$$F(x, y, z) = (x^2 + y^2 - 1)^2 + z^2$$

で定義する。$w \in \mathbf{R}$ に対し、$F^{-1}(w)$ は部分多様体となるかどうか論ぜよ。

問題２． 複素平面 $\mathbf{C}$ から原点を除いた空間 $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ 上の同値関係 $\sim$ が

$$z \sim -\frac{1}{\bar{z}}$$

で生成されているとする。

$(\mathbf{C} \setminus \{0\})/\sim$ は実２次元微分可能多様体となることをしめせ。

問題３． 微分可能多様体上のフロー（１パラメータ変換群) の定義を述べよ。
フローとベクトル場の関係を述べよ。

問題４． a, b を正実数とする。3 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ の部分多様体 X と Y を次で定義する。

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 = a^2\}$$
$$Y = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid y^2 + z^2 = b^2\}$$

(1) $a^2 \neq b^2$ ならば X と Y は横断的に交わることを示せ。
(2) $a^2 = b^2$ のとき、X と Y の共通部分は多様体であるかどうか論ぜよ。

問題５． 多様体上のリーマン計量の定義を述べよ。
コンパクト多様体上には、リーマン計量が存在することについて論ぜよ。