0.1　なぜ多様体を学ぶか

現代の数学を志す学生諸君に多様体を学んで欲しい理由は、おおざっぱに言って次の３つの点である。

(1)　多様体は幾何学の対象として実際に様々な場面で現れるものであること。

(2)　多様体は現代の幾何学の問題設定の枠組みを与えるものであること。

(3)　多様体の定義から、ベクトル場や微分形式の概念の定義、代数的な構造の抽出、上部構造の定式化にいたる多様体の理論は、現代数学の理論構成の典型を与えるものであること。

最初のポイントは、多様体理論の成立した背景から考えると良くわかることかもしれない。

曲面論においては、方程式の表す図形はほとんどの場合局所的に関数のグラフの形に書かれることがわかるし、空間全体でなく、曲面の上だけで定義された曲率等の関数を取り扱う必要が生じる。また、方程式の表す図形に対して、それを記述する一般的なパラメータのとり方から曲率などを書き表すと対称性のある表示が得られることや、場合によってはパラメータのうまいとり方を工夫すると図形の形がきれいに記述される。

また、複素関数論においては、複素関数に対して，その自然な定義域が定まり，その定義域の形状を考えることにより、線積分の振る舞いが理解しやすくなる。

さらに、古典力学や流体力学の記述のために使われたベクトル解析では、次元の高い空間上での解析が必要になる。エネルギーや運動量のような不変量があることにより、このような空間内での運動はより狭い空間に束縛される。そこで、次元の少し下がった空間上で、パラメータのとり方を様々に取り換えて解析を行なうことが必要になる。また、各点にベクトル量が与えられている場に対しての解析を行なうことが必要になるが、それはベクトル場、微分形式の定義が自然なものであることを示している。

このような様々な場面に現れる対象を抽象して、多様体という構造を持つものを考えるのが非常に自然であることがわかったのである。

実際に現れる幾何学的対象の中で必要な性質だけを抽象して定義としたものが多様体の定義である。

このような幾何学的対象の最も基本的な性質は、各点のまわりでは「座標」によって記述されるということである。その性質を抽象して位相多様体というものを定義することができる。

位相多様体とは「局所ユークリッド的ハウスドルフ空間」のことである。「空間」とは位相空間すなわち開集合、閉集合あるいは近傍の概念が定まった空間であり,「局所ユークリッド的」とは、任意の点 x に対して、x の近傍 U, ある次元のユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ の開集合 V で、U, V が同相となるものをとることができることである。「ハウスドルフ」とは、２点を分離する開集合がとれる、すなわち、相異なる２点 x_1, x_2 に対して、開集合 U_1, U_2 で、$x_1 \in U_1, x_2 \in U_2, U_1 \cap U_2 = \emptyset$ となるものが存在することである。

定義 0.1.1 位相空間 X が n 次元位相多様体であるとは、X はハウスドルフ空間であり，任意の点 $x \in X$ に対し、x の近傍 U で、$\mathbf{R}^n$ の開集合 V と同相なものが存在することである。

座標があれば、点は数値の組 $(x_1, \ldots, x_n)$ で表され、その上の関数は $f(x_1, \ldots, x_n)$ のように表される。自然に現れてくる曲面上では微分積分を行なうことが出来、それにより、幾何的性質を明らかに出来た。しかし、位相多様体上では、微分は考えにくい。微分をするときには、点の位置の変化に対する、関数の変化の割合を考える。位置の変化を道のりで表そうとすると次のような例を考えると関数の変化が記述できないことがわかるであろう。

【例 0.1.2】 (コッホ曲線) 正三角形から始める。それぞれの辺を３等分し、辺の中央の $\dfrac{1}{3}$ を一辺とする正三角形を書く。辺の中央の $\dfrac{1}{3}$ を正三角形の２辺に置き換える。これを繰り返す。これはある図形に収束する。この図形は、いたるところ微分不可能な曲線として von Koch (1870–1924) により与えられた。このような図形は、ここ２０年くらいフラクタルと呼ばれ研究されている。

この図形は円周と同相である。３つの点に対し巡回順序が定義されることから、円周との同相写像が定義される。この図形上、自然に定義される道の

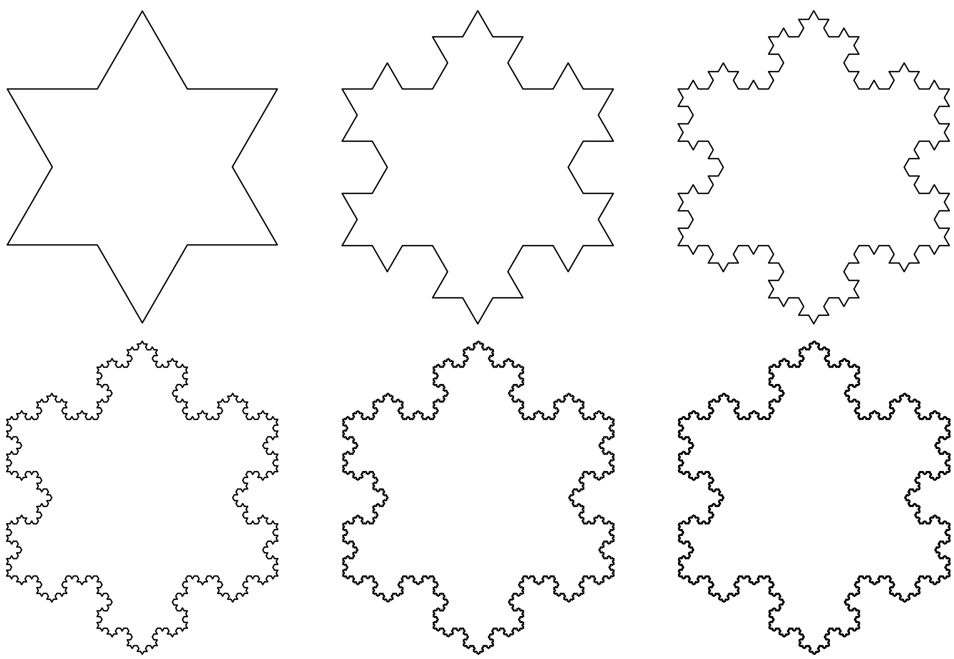

図 1　コッホ曲線の構成

りで、２点間の距離は無限大である。このことは長さが構成の途中で順に $\frac{4}{3}$ 倍になることからわかる。普通の単位円周の長さは、2π である。長さの構造を自然に考えて微分しようとするといつでも無限大で割ってしまう。

これは、同相写像が長さの有限性を保たないことが原因である。

微分が行なえることを要求すると、局所ユークリッド的というだけではなく、ユークリッド空間の開集合と同相な近傍の間の関係（座標変換）をきちんと整備する必要がある。こうして、微分可能多様体の概念にたどり着くのである。

このような定式化により、微分可能多様体の概念が確立される。多様体は、各点の近傍の性質が一定であるような等質な空間である。このような等質な空間の理論がきちんと出来上がることにより、特異点を持つような空間も扱えるようになる。

こうして、微分可能多様体が定義されると、すでに定義した位相多様体と微分可能多様体は本質的に異なるかという疑問が現れる。これは、微分可能構造を位相多様体の上部構造と見て、「位相多様体に微分可能構造を入れられるか」あるいは、「微分可能構造は何通りあるか」という問になる。

コッホ曲線の場合は、円周と同相だから、円周の座標を入れれば、普通の円周として微分可能多様体の構造が入るというように考える。２０世紀の数学の成果として、次のようなことがわかっている。１次元、２次元、３次元では微分可能構造は入り、一意である。４次元では、微分可能構造が入らないものがある。また一意とは限らない。これはドナルドソン (Donaldson), フリードマン (Freedman) による１９８２年－８６年の結果である。, それ以前に７次元では微分構造は一意とは限らないことをミルナー (Milnor) が示している。実際、彼は１９５６年に７次元球面には２８個の微分構造があることを示した。このことから８次元の位相多様体で微分構造を持たないものがあることもわかる。

これらの問題はポアンカレ (Poincaré) 予想に関係がある。予想は「３次元多様体 X がコンパクト、連結、単連結ならば X は３次元球面と同相」というものである。ポアンカレは１００年位前にこれを予想した。多様体の概念がはっきりと定式化されていない時代に述べられたものである。実はポアンカレは、空間の形について研究し、ホモロジー (homology) 理論を作り、３次

元多様体がホモロジーが球面と同じならば同相という内容の論文を書いた。しかし、彼は自身の誤りに気が付いて、ホモロジーが３次元球面に等しいが、基本群が３次元球面と異なるポアンカレ ホモロジー球面を構成した。これが、ポアンカレ予想の発端である。

n 次元球面に対して、単連結でホモロジー群がホモロジーが n 次元球面と同じならば同相かという一般化されたポアンカレ予想が考えられる。$n \geqq 5$ のときに正しいことをスメール Smale が１９６０年代に解いた。１９８５年ころ $n = 4$ のときに正しいことを、フリードマン Freedman が解いた。２００３年、ペレルマン Perelman は３次元のポアンカレ予想が正しいことを示したと思われる。

単連結でホモロジー群がホモロジーが n 次元球面と同じならば、S^n と微分同相になるかという問題がある。これは、４次元では未解決、７次元では上に述べた反例がある。

このような問題が定式化されるというのは、すでに２番目の点の一部分である。つまり、「ある一つの性質を持つ多様体は、どのようなものか」というような問が定式化されるということである。また、一旦、解析を行なう場としての多様体が定義されると、その上の常微分方程式、偏微分方程式、多様体の間の写像、多様体上の構造についての様々な問題が定式化される。現代の幾何学の多くの問題は多様体上で定義された様々な概念についての問題である。

３番目について述べよう。多様体の理論の構成は次のようなものである。まず、多様体の定義は、各点の近傍の記述と近傍の間の関係および分離公理から成立っている。その定義から、ベクトル場および微分形式が定義されるが、これらは自然に区別されているものである。ベクトル場の全体は、リー代数の構造を持ち、その積分としてリー群の作用などが考えられる。微分形式は次数付き微分加群の構造を持ち、ドラーム コホモロジー de Rham cohomology という不変量を与える。多様体が定義されるとその上部構造として、リーマン構造、複素構造、シンプレクティク構造、接触構造、葉層構造などがが定式化される。こうして新しい視点で幾何学を見直すことができるようになるのである。

【問題 0.1.3】 3 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ 内の点 $P_1, ..., P_k$ と、それらの中の２点を結ぶ線分 $C_1 = \overline{P_{i_1}P_{j_1}}, ..., C_m = \overline{P_{i_m}P_{j_m}}$ が与えられているとする。これらの線分はお互いに端点以外では交わらず、$\{P_1, \ldots, P_k\}$ と両端のみで交わるとする。(すべて $\mathbf{R}^3$ の部分集合と考える。) $\{P_1, \ldots, P_k\}$ とこれらの線分の和集合 X が、部分空間としての位相について 1 次元位相多様体となるための条件は何か。このとき、線分の個数と点の個数との間にはどのような関係があるか。

余裕があれば、$P_1, ..., P_k$ の中の２点を結ぶ線分 $C_1 = \overline{P_{i_1}P_{j_1}}, ..., C_m = \overline{P_{i_m}P_{j_m}}$ と、３点を頂点とする三角形 $T_1 = \triangle P_{u_1}P_{v_1}P_{w_1}, \ldots, T_\ell = \triangle P_{u_\ell}P_{v_\ell}P_{w_\ell}$ が与えられ、これらの三角形の辺は、$C_1, \ldots, C_m$ のどれかであり、三角形の内部と線分や $\{P_1, \ldots, P_k\}$ は交わらないとする。また、線分はお互いに端点以外では交わらず、$\{P_1, \ldots, P_k\}$ と両端のみで交わるとする。$\{P_1, \ldots, P_k\}$、線分、三角形の和集合 Y が部分空間としての位相について 2 次元位相多様体となるための条件を考えてみよ。

【解】 位相多様体の定義を満たしているかを検証する。ハウスドルフ空間であることは、ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ （ハウスドルフ空間）の部分空間であることから従う。１次元位相多様体であることは、任意の点の近傍として、直線と同相なものがとれることである。（ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ 内の δ 近傍 $\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| < \delta\}$ は、$\mathbf{R}^n$ と同相である。）従って、まず線分 C_a の内点 p は、$\mathbf{R}$ と同相な δ 近傍をもつ。δ として、$\min\{\|p-q\| \mid q \in C_b,\ C_b \neq C_a\}$ より小さいものをとればよい。点 P_a について、P_a がちょうど２つの線分 C_a, C_b の端点であるときは δ を $\min\{\|p-q\| \mid q \in C_c,\ C_c \neq C_a,\ C_c \neq C_b\}$ よりも小さくとれば P_a の δ 近傍は $\mathbf{R}$ と同相である。P_a が孤立点、一つだけの線分の端点、３つ以上の線分の端点である時は、どんな近傍をとっても $\mathbf{R}$ と同相にならない。実際、P_a を端点とする線分の点のみからなる連結な近傍 U をとり、$U - \{P_a\}$ を考えるとその連結成分の数は、０個、１個、３個以上となるが、１次元ユークリッド空間の連結な区間からその内部の点を取り除くと成分の数は２となる。こうして、X が１次元位相多様体となる必要十分条件は、P_i が２つの線分の端点になることである。このとき、線分の個数と点の個数は等しい。（実際にはいくつかの円周の非連結和と同相な図形となる。）

後半は、証明をつけて解答を与えることは、ホモロジーあるいはホモトピーの知識が必要である。状況を考えると、次の２つの条件を満たすことが正しい答であることは納得できると思う。

条件の一つは、各線分がちょうど２つの三角形の境界となっていることである。（そうでないと線分上の点で局所ユークリッド的でない。）

もう一つの条件は、点 P_i は、三角形の頂点となっており、点 P_i を頂点とする三角形を $T_{i_1} = \triangle P_i P_{v_1} P_{w_1}, \dots, T_{i_s} = \triangle P_i P_{v_s} P_{w_s}$ とするときに、線分 $P_{v_1}P_{w_1}, \dots, P_{v_s}P_{w_s}$ の和集合が連結である（一つの円周と同相になっている）ことである。（そうでないと、P_i の近傍から P_i を除くと連結でなくなり、局所ユークリッド的でない。）

0.2　逆写像定理、陰関数定理

逆写像定理、陰関数定理は多様体の定義のために必要不可欠な定理である。

定理 0.2.1（逆写像定理）　n 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ の開集合 U と U から $\mathbf{R}^n$ への写像 $F : U \longrightarrow \mathbf{R}^n$ が与えられているとする。F は U 上 C^r 級 $(r \geqq 1)$ であるとする。すなわち、$F = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$ と書くとき、$f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n)$ が、C^r 級 $(r \geqq 1)$ であるとする。U 上の点 $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ において次の行列（ヤコビ行列）が可逆であるとする。

$$DF(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

このとき、$\mathbf{y}^0 = f(\mathbf{x}^0)$ の近傍 V, V 上で定義された C^r 級写像 $G : V \longrightarrow U$ で、$G(\mathbf{y}^0) = \mathbf{x}^0$, $G \circ F = \mathrm{id}_{G(V)}$, $F \circ G = \mathrm{id}_V$ を満たすものが存在する。

ここで、$\mathrm{id}_{G(V)} : G(V) \longrightarrow G(V)$, $\mathrm{id}_V : V \longrightarrow V$ は恒等写像である。この G は F の局所的な逆写像と呼ばれる。

念のために、上の定理の中に現れた n 変数関数 $f_i(x_1,\ldots,x_n)$ が C^r 級であることの定義も与えておく。

定義 0.2.2　正整数 r に対し、関数 $f_i(x_1,\ldots,x_n)$ が C^r 級とは、正整数 $s \leqq r$ に対し、$f_i(x_1,\ldots,x_n)$ のすべての s 階の偏微分が存在し、連続であることである。

1 階偏微分は $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$, 2 階偏微分は $\dfrac{\partial^2 f_i}{\partial x_{j_1}\partial x_{j_2}}$, s 階偏微分は $\dfrac{\partial^s f_i}{\partial x_{j_1}\ldots\partial x_{j_s}}$ のように書かれる。偏微分が連続であれば、偏微分の順序によらないので、r 階偏微分は $\dfrac{\partial^r f_i}{\partial x_1^{r_1}\ldots\partial x_n^{r_n}}$ $(r_1+\cdots+r_n=r)$ のように書かれる。C^r 級のことを r 回連続微分可能とも呼ぶ。任意の正整数 r に対して、C^r 級のとき、C^∞ 級あるいは無限回連続微分可能であるという。

定理 0.2.3（陰関数定理）　正整数 m, n について、$m<n$ とする。n 次元ユークリッド空間の開集合 U と U から $\mathbf{R}^m$ への写像 $F: U \longrightarrow \mathbf{R}^m$ が与えられているとする。$F = \begin{pmatrix} f_1(x_1,\ldots,x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1,\ldots,x_n) \end{pmatrix}$ は U 上 C^r 級 $(r \geqq 1)$ であるとする。$\mathbf{x}^0=(x_1^0,\ldots,x_n^0)$ においてヤコビ行列 $DF(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$ の階数（ランク）が m であるとする。すなわち、適当に m 個の列を取ると、それらの列は線形独立であるとする。そこで、座標 x_1, …, x_n の順序を入れ替えて、$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_{n-m+1}} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_{n-m+1}} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$ は可逆であるとする。このとき、$(x_1^0,\ldots,x_{n-m}^0) \in \mathbf{R}^{n-m}$ の近傍 $W \subset \mathbf{R}^{n-m}$ と C^r 級写像 $g: W \longrightarrow \mathbf{R}^m$ で、

$$\begin{aligned} &g(x_1^0,\ldots,x_{n-m}^0) = (x_{n-m+1}^0,\ldots,x_n^0), \\ &F(x_1,\ldots,x_{n-m},g(x_1,\ldots,x_{n-m})) = F(\mathbf{x^0}) \end{aligned}$$

を満たすものが存在する。

【問題 0.2.4】 (1) $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ を $f(x,y) = x^3 - x + y^2$ で定義するとき、f のヤコビ行列を求めよ。

(2) (1) の f について、$z \in \mathbf{R}$ の逆像 $f^{-1}(z)$ の各成分が「滑らかな曲線」となるための z の条件を求めよ。

(3) $F : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ を $F(x,y,z) = (x^3 - zx + y^2, z)$ で定義するとき、F のヤコビ行列を求めよ。

(4) (3) の F について、$(s,t) \in \mathbf{R}^2$ の逆像 $F^{-1}(s,t)$ の各成分が、「滑らかな曲線」となるための (s,t) の条件を求めよ。

但し、$\mathbf{R}^n$ の「滑らかな曲線」C とは、C の各点 x に対し、x の近傍 U と C^∞ 級写像 $f : U \longrightarrow \mathbf{R}^{n-1}$ で、U 上で $\operatorname{rank} Df = n-1$, $U \cap C = f^{-1}(f(x))$ とするものがあることである。（1次元部分多様体であること）

【解】 (1) $Df = (\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}) = (3x^2 - 1, 2y)$. （チェインルールを書くために、行ベクトルで書くほうが良い。）

(2) 滑らかでなくなる可能性のある点を求め、その点の像を考えると z がその補集合にあることが（十分）条件である。（その十分条件を示すだけでもよい。この問の場合、必要条件にもなっている。その理由を考えることも大切である.）

Df のランクが 0 であることは、$Df = (0,0)$ であることゆえ、$3x^2 - 1 = 0$, $2y = 0$ から、$(\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}, 0)$ が滑らかでなくなる可能性のある点（臨界点）である。その像は $f(\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}, 0) = \mp\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$. 条件は $z \neq \pm\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$.

（$f^{-1}(\dfrac{2}{3\sqrt{3}})$ は、$(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, 0)$ の近傍で、１点から４つの線分がでているものと同相で、局所ユークリッド的でない。$f^{-1}(-\dfrac{2}{3\sqrt{3}})$ は、$(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, 0)$ が孤立点で、局所的に $\mathbf{R}$ と同相でない。）

(3) $F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$ として、

$$DF = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} & \dfrac{\partial f_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} & \dfrac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2 - z & 2y & -x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

（チェインルールを書くために、２行３列の行列で書くほうが良い。）

(4) 滑らかでなくなる可能性のある点を求め、その点の像を考えると (s,t) がその補集合にあることが条件である。（この問の場合は、必要条件にもなっている。）

DF の $(2,3)$ 成分は 1 だから、$\mathrm{rank}\,DF < 2$ と $3x^2 - z = 0$ かつ $2y = 0$ は同値。これは、$z = 3x^2$ かつ $y = 0$ であり、その像は、
$\left\{ \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x^3 \\ 3x^2 \end{pmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbf{R} \right\}$. これは $\left\{(s,t) \in \mathbf{R} \;\middle|\; \left(\dfrac{s}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{t}{3}\right)^3 \right\}$ と同じ集合である。条件は $\left(\dfrac{s}{2}\right)^2 \neq \left(\dfrac{t}{3}\right)^3$

（$\left(\dfrac{s}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{t}{3}\right)^3$ のとき、$s > 0$ ならば $F^{-1}(s,t)$ の点 $(-2^{-\frac{1}{3}} s^{\frac{1}{3}}, 0, t)$ において、１点から４つの線分がでているものと同相で、局所ユークリッド的でない。$s < 0$ ならば $F^{-1}(s,t)$ の点 $(2^{-\frac{1}{3}} |s|^{\frac{1}{3}}, 0, t)$ は孤立点で、局所的に $\mathbf{R}$ と同相でない。また $F^{-1}(0,0)$ は xy 平面の x 軸の負の方向に接して２つの枝が分かれている。これは局所的に $\mathbf{R}$ 上の $\mathbf{R}^2$ に値を持つ C^∞ 級関数のグラフとならないから、滑らかな曲線ではない。

【問題 0.2.5】　$\mathbf{R}^3$ の次の部分集合が「滑らかな曲面」であるかどうか論ぜよ。

(1)　$C = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 = z^2 \right\}$

(2)　$X = \left\{ (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{r} z^2 = -\{x^2+y^2-1\}\{(x+3)^2+y^2-1\} \\ \cdot\{(x-3)^2+y^2-1\}\{x^2+y^2-25\} \end{array} \right\}$

(3)　$Y = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; z^2 = -\{(x+1)^2+y^2-1\}\{(x-1)^2+y^2-1\} \right\}$

但し、$\mathbf{R}^3$ の「滑らかな曲面」S とは、S の各点 x に対し、x の近傍 U と C^∞ 級関数 $f : U \longrightarrow \mathbf{R}$ で、U 上で $\mathrm{rank}\,Df = 1, U \cap S = f^{-1}(f(x))$ とするものがあることである。（２次元部分多様体であること）

【解】　滑らかでなくなる可能性のある点を求める。（この問の場合、そこで２次元多様体でなくなっている。その理由を考えることも大切である.）

(1). C について、$f(x,y,z) = x^2+y^2-z^2$ とおくと、$Df = (2x, 2y, -2z)$ である。$(0,0,0)$ を除いて、$f(x,y,z) = 0$ は滑らかな曲面である。図形の $(0,0,0)$ の近傍から $(0,0,0)$ を除くと連結でなくなる。従って、$(0,0,0)$ においては局所的に２次元ユークリッド空間と同相でない。C は滑らかな曲面ではない。

(2). X について、定義式の左辺から右辺を引いたものを $f(x,y,z) = g_1g_2g_3g_4+z^2$, $g_1 = x^2+y^2-1$, $g_2 = (x+3)^2+y^2-1$, $g_3 = (x-3)^2+y^2-1$, $g_4 = x^2+y^2-25$ とおく。$f = 0$ を満たす (x,y,z) の (x,y) の存在範囲は、$g_1g_2g_3g_4 \leqq 0$ の範囲であるから、半径 5 の円の周または内部で $(\pm 3, 0)$, $(0,0)$ を中心とする単位円の周または外側である。$Df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$ について、

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= 2xg_2g_3g_4 + 2(x+3)g_1g_3g_4 + 2(x-3)g_1g_2g_4 + 2xg_1g_2g_3 \\
&= 2x(g_2g_3g_4 + g_1g_3g_4 + g_1g_2g_4 + g_1g_2g_3) - 6 \cdot 2 \cdot 6xg_1g_4 \\
&= 2x(g_2g_3g_4 + g_1g_3g_4 + g_1g_2g_4 + g_1g_2g_3 - 36g_1g_4), \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= 2y(g_2g_3g_4 + g_1g_3g_4 + g_1g_2g_4 + g_1g_2g_3) \\
\frac{\partial f}{\partial z} &= 2z
\end{aligned}
$$

である。$z \neq 0$ のところでは滑らかな曲面になっているから、$z = 0$ かつ、$g_1g_2g_3g_4 = 0$ において、$\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ がともに 0 になることがあるかどうかを考える。

$g_1 = 0$ の点では、$g_2g_3g_4 \neq 0$ であり、この点で $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0$ とすると $(x,y) = 0$ となるが、これは $g_1 = 0$ の点ではない。従って、$g_1 = 0$, $z = 0$ の点においては滑らかな曲面である。

$g_4 = 0$ の点では、$g_1g_2g_3 \neq 0$ であり、この点で $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0$ とすると $(x,y) = 0$ となるが、これは $g_4 = 0$ の点ではない。$g_4 = 0$, $z = 0$ の点においては滑らかな曲面である。

$g_2 = 0$ の点では、$g_1g_3g_4 \neq 0$ であるから、$\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ とすると $y = 0$ となる。この点は $(-4,0,0)$ または $(-2,0,0)$ である。この点では、$\frac{\partial f}{\partial x} = -8g_1g_4\{(-7)^2 - 1 - 36\} = -8 \cdot 12g_1g_4$ または $\frac{\partial f}{\partial x} = -8g_1g_4\{(-5)^2 - 1 - 36\} = 8 \cdot 12g_1g_4$ となり、$\frac{\partial f}{\partial x}$ は 0 ではない。従って、$g_2 = 0$, $z = 0$ の点においては滑らかな曲面である。

$g_3 = 0$ の点では、$g_1g_2g_4 \neq 0$ であるから、$\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ とすると $y = 0$ となる。この点は $(2,0,0)$ または $(4,0,0)$ である。この点では、$\frac{\partial f}{\partial x} = -8g_1g_4\{5^2 - 1 - 36\} = 8 \cdot 12g_1g_4$ または $\frac{\partial f}{\partial x} = -8g_1g_4\{7^2 - 1 - 36\} = -8 \cdot 12g_1g_4$ となり、$\frac{\partial f}{\partial x}$ は 0 ではない。従って、$g_3 = 0$, $z = 0$ の点においては滑らかな曲面

である。

従って、X は滑らかな曲面である。(種数 3 の向きづけ可能な閉曲面と呼ばれる。)

(3). Y について。定義式の左辺から右辺を引いたものを $f(x,y,z) = g_1g_2+z^2$, $g_1=(x+1)^2+y^2-1$, $g_2=(x-1)^2+y^2-1$ とすると、$f=0$ を満たす (x,y,z) の (x,y) の存在範囲は $(\pm1,0)$ を中心とする単位円の周または内部である。

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x+1)g_2+2(x-1)g_1 = 2x(2x^2+2y^2)-2(4x) = 2x(2x^2+2y^2-4)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y(g_2+g_1) = 2y(2x^2+2y^2)$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2z$$

$f=0$ かつ $Df=0$ とすると $(x,y,z)=(0,0,0)$ である。$(x,y,z)\neq(0,0,0)$ となる点で Y は滑らかな曲面であるが、$(0,0,0)$ の近傍で Y は $\mathbf{R}^2$ と同相ではない。なぜなら、Y の $(0,0,0)$ の近傍から $(0,0,0)$ を除くと連結でない。

逆写像定理から陰関数定理を導くことができる。

証明 陰関数定理の $F: U \longrightarrow \mathbf{R}^m$ に対して、$\widehat{F}: U \longrightarrow \mathbf{R}^{n-m}\times\mathbf{R}^m$ を $\widehat{F}(x_1,\ldots,x_n) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-m} \\ F(x_1,\ldots,x_n)\end{pmatrix}$ で定義する。$\widehat{F}$ のヤコビ行列は、

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots \\
0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\
\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \ldots & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{n-m}} & \frac{\partial f_1}{\partial x_{n-m+1}} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\
\vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \ldots & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_{n-m}} & \frac{\partial f_m}{\partial x_{n-m+1}} & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}
\end{pmatrix}$$

である。この行列は、$(\frac{\partial f_i}{\partial x_j})_{i=1,\ldots,m;j=n-m+1,\ldots,n}$ が可逆であることから、可逆である。従って、逆写

像定理から、$(x_1^0, \ldots, x_{n-m}^0, F(\mathbf{x^0}))$ の近傍 V と C^r 級写像 $G : V \longrightarrow U$ で、$G \circ \widehat{F} = \mathrm{id}_{G(V)}$, $\widehat{F} \circ G = \mathrm{id}_V$ を満たすものがある。

$\mathbf{R}^n$ を前の $n-m$ 個の座標と後ろの m 個の座標に分割して、$\mathbf{R}^n \ni \mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in \mathbf{R}^{n-m} \times \mathbf{R}^m$ と書き、

$$\widehat{F}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = (\mathbf{x}_1, F(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)),\ G(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) = (G_1(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2), G_2(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2))$$

とする。

$\widehat{F} \circ G = \mathrm{id}_V$ は、

$$(G_1(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2), F\big(G_1(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2), G_2(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)\big)) = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)$$

であるから、$\mathbf{R}^{n-m}$ 成分をみて $G_1(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) = \mathbf{y}_1$ である。これを $\mathbf{R}^m$ 成分に代入すると、$F(\mathbf{y}_1, G_2(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)) = \mathbf{y}_2$ を得る。$\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1$, $\mathbf{y}_2 = F(\mathbf{x}_1^0, \mathbf{x}_2^0)$ として、$g(\mathbf{x}_1) = G_2(\mathbf{x}_1, F(\mathbf{x}_1^0, \mathbf{x}_2^0))$ とおくと、$F(\mathbf{x}_1, g(\mathbf{x}_1)) = F(\mathbf{x}^0)$ をみたす。 ■

この証明から、陰関数定理の仮定のもとで、U の点の座標として、$(\mathbf{x}_1, F(\mathbf{x}))$ がとれることがわかる。

【問題 0.2.6】 (リプシッツ連続性) $\mathbf{R}^n$ の開集合 U 上で定義された C^1 級写像 $G : U \longrightarrow \mathbf{R}^m$, $G(\mathbf{x}) = (g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n))$ が U に含まれる凸な閉集合 A 上で $\left|\dfrac{\partial g_i}{\partial x_j}\right| \leqq K$ を満たすとする。このとき、$\mathbf{x}, \mathbf{x}+\mathbf{v} \in A$ に対し、$\|G(\mathbf{x}+\mathbf{v}) - G(\mathbf{x})\| \leqq \sqrt{mn}K\|\mathbf{v}\|$ となることを示せ。

【解】 g_i は連続微分可能ゆえに U 上で全微分可能である。すなわち、

$$g_i(\mathbf{x}+\mathbf{v}) - g_i(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial x_j}\, v_j + \varepsilon_i(\mathbf{x}, \mathbf{v})\|\mathbf{v}\|$$

で、$\lim_{\mathbf{v}\to 0} \varepsilon_i(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = 0$. これを、$\mathbf{x} + (t+s)\mathbf{v}$, $\mathbf{x} + t\mathbf{v}$ に対して当てはめると、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} g_i(\mathbf{x}+t\mathbf{v}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}+t\mathbf{v})\, v_j$$

である。従って、

$$\begin{aligned} g_i(\mathbf{x}+\mathbf{v}) - g_i(\mathbf{x}) &= \Big[g_i(\mathbf{x}+t\mathbf{v}) \Big]_{t=0}^{t=1} \\ &= \int_0^1 \{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} g_i(\mathbf{x}+t\mathbf{v})\}\,\mathrm{d}\,t \\ &= \int_0^1 \{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}+t\mathbf{v})\, v_j\}\,\mathrm{d}\,t \end{aligned}$$

さて、$\mathbf{x}+\mathbf{v}, \mathbf{x}$ が A に含まれれば、$t \in [0,1]$ に対して、$\mathbf{x}+t\mathbf{v} \in A$ だから、最後の積分の絶対値は $K\sum_{j=1}^{n}|v_j|$ で評価される。$\sum_{j=1}^{n}|v_j| \leqq \sqrt{n}\|\mathbf{v}\|$ だから、$|g_i(\mathbf{x}+\mathbf{v})-g_i(\mathbf{x})| \leqq \sqrt{n}K\|\mathbf{v}\|$. 従って、$\|G(\mathbf{x}+\mathbf{v})-G(\mathbf{x})\| \leqq \sqrt{mn}K\|\mathbf{v}\|$.

【問題 0.2.7】(チェイン ルール) $f : \mathbf{R}^m \longrightarrow \mathbf{R}^n$, $g : \mathbf{R}^\ell \longrightarrow \mathbf{R}^m$ はともに連続微分可能な写像とする。すなわち、$f(\mathbf{y}) = (f_1(y_1,\ldots,y_m),\ldots,f_n(y_1,\ldots,y_m))$, $g(\mathbf{x}) = (g_1(x_1,\ldots,x_\ell),\ldots,g_m(x_1,\ldots,x_\ell))$ の各成分が連続微分可能とする。f, g のヤコビ行列は, n 行 m 列の行列 $Df = \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}\right)_{i=1,\ldots,n;j=1,\ldots,m}$, m 行 ℓ 列の行列 $Dg = \left(\dfrac{\partial g_j}{\partial x_k}\right)_{j=1,\ldots,m;k=1,\ldots,\ell}$ である。この時、合成写像 $f\circ g : \mathbf{R}^\ell \longrightarrow \mathbf{R}^n$ も連続微分可能な写像であることを示し、$f\circ g$ のヤコビ行列 $D(f\circ g)$ について $D(f\circ g)(\mathbf{x}) = Df(g(\mathbf{x}))Dg(\mathbf{x})$ を示せ。

【解】 f_i $(i=1,\ldots,n)$ が連続微分可能であることは、$\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}(\mathbf{y})$ が存在し、$\mathbf{y}$ について連続であることである。このとき、f_i は全微分可能となる。すなわち、

$$f_i(\mathbf{y}+\mathbf{v}) - f_i(\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\,v_j + \varepsilon_{f_i}(\mathbf{y},\mathbf{v})\|\mathbf{v}\|$$

として、$\lim_{\mathbf{v}\to 0}\varepsilon_{f_i}(\mathbf{y},\mathbf{v}) = 0$ である。また、$g=(g_1,\ldots,g_m)$ が連続微分可能であることは、$\dfrac{\partial g_j}{\partial x_k}(\mathbf{x})$ が存在し、$\mathbf{x}$ について連続であることであるが、同様に、

$$g_j(\mathbf{x}+\mathbf{u}) - g_j(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{\ell}\frac{\partial g_j}{\partial x_k}\,u_k + \varepsilon_{g_j}(\mathbf{x},\mathbf{u})\|\mathbf{u}\|$$

とするとき、$\lim_{\mathbf{u}\to 0}\varepsilon_{g_j}(\mathbf{x},\mathbf{u}) = 0$ を満たす。また、$\mathbf{x}$ の近傍での $\left|\dfrac{\partial g_j}{\partial x_k}\right|$ が K 以下ならば、g は、その近傍でリプシッツ連続である。

$$\|g(\mathbf{x}+\mathbf{u}) - g(\mathbf{x})\| \leq K\sqrt{\ell m}\ \|\mathbf{u}\|.$$

従って、$\|\mathbf{u}\| \leqq \varepsilon$ ならば、

$$
\begin{aligned}
&f_i(g(\mathbf{x}+\mathbf{u}))-f_i(g(\mathbf{x}))\\
=&\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(g_j(\mathbf{x}+\mathbf{u})-g_j(\mathbf{x}))\\
&+\varepsilon_{f_i}(g(\mathbf{x}),g(\mathbf{x}+\mathbf{u})-g(\mathbf{x}))\|g(\mathbf{x}+\mathbf{u})-g(\mathbf{x})\|\\
=&\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(\sum_{k=1}^{\ell}\frac{\partial g_j}{\partial x_k}u_k+\varepsilon_{g_j}(\mathbf{x},\mathbf{u})\|\mathbf{u}\|)\\
&+\varepsilon_{f_i}(g(\mathbf{x}),g(\mathbf{x}+\mathbf{u})-g(\mathbf{x}))K\sqrt{\ell m}\|\mathbf{u}\|\\
=&\sum_{k=1}^{\ell}\{\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\frac{\partial g_j}{\partial x_k}\}u_k\\
&+\{\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\varepsilon_{g_j}(\mathbf{x},\mathbf{u})+\varepsilon_{f_i}(g(\mathbf{x}),g(\mathbf{x}+\mathbf{u})-g(\mathbf{x}))K\sqrt{\ell m}\}\|\mathbf{u}\|
\end{aligned}
$$

ここで、$\mathbf{u}\to 0$ のとき、$\varepsilon_{g_j}(\mathbf{x},\mathbf{u})\to 0$, $g(\mathbf{x}+\mathbf{u})\to g(\mathbf{x})$ だから $\varepsilon_{f_i}(g(\mathbf{x}),g(\mathbf{x}+\mathbf{u})-g(\mathbf{x}))\to 0$ である。従って，最後の中括弧は $\{\bullet\}\to 0$ であるから、$f_i\circ g$ は $\mathbf{x}$ で全微分可能であり、偏微分係数は $\displaystyle\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\circ g\ \frac{\partial g_j}{\partial x_k}$ である。$\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}\circ g$, $\dfrac{\partial g_j}{\partial x_k}$ は連続であり、行列の積は連続であるから、$\displaystyle\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\circ g\ \frac{\partial g_j}{\partial x_k}$ は $\mathbf{x}$ について連続である。従って、$f\circ g$ は連続微分可能である。ヤコビ行列 $D(f\circ g)$ がヤコビ行列 $Df\circ g$ と Dg の行列の積になることは上の偏微分係数の式そのものである。

【問題 0.2.8】 (C^r 写像の合成) $f:\mathbf{R}^m\longrightarrow\mathbf{R}^n$, $g:\mathbf{R}^\ell\longrightarrow\mathbf{R}^m$ がともに C^r 級写像とする。この時、合成写像 $f\circ g:\mathbf{R}^\ell\longrightarrow\mathbf{R}^n$ も C^r 級写像であることを示せ。

$r=1$ の場合は前の問である。$r\geqq 2$ とする。数学的帰納法によることにして、この問の命題が $r-1$ に対しては正しいとする。f,g が C^r 級とすると、Df, Dg は C^{r-1} 級である。帰納法の仮定から $(Df)\circ g$ は C^{r-1} 級である。行列の積は C^∞ 級だから、$(Df)\circ g\,Dg$ は C^{r-1} 級である。$D(f\circ g)=(Df)\circ g\,Dg$ だから、$D(f\circ g)$ が C^{r-1} 級であり、$f\circ g$ は C^r 級となる。

0. 3　逆写像定理の証明

逆写像定理の証明は、まず、$\mathbf{x}^0$、$F(\mathbf{x}^0)$ が、$\mathbf{R}^n$ の原点で、$\mathbf{x}^0$ におけるヤコビ行列が単位行列の場合の逆写像定理を示す。ヤコビ行列が一般の可逆行列の場合は、可逆行列の作用や平行移動により、単位行列の場合に帰着される。

0. 3. 1　特別な場合の逆写像定理

定理 0.3.1（ヤコビ行列が単位行列のときの逆写像定理）　n 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ の原点 0 を含む開集合 U と U から $\mathbf{R}^n$ への C^r 級 $(r \geqq 1)$ 写像 $F : U \longrightarrow \mathbf{R}^n$ が与えられ、$F(0) = 0,\ F(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}$ と書くとき、$DF_{(0)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ を満たすとする。このとき、0 の近傍 V, V 上で定義された C^r 級写像 $G : V \longrightarrow U$ で、$G \circ F = \mathrm{id}_{G(V)}$, $F \circ G = \mathrm{id}_V$ を満たすものが存在する。

DF は 0 において、単位行列であるから、F は恒等写像と近い。次のような思考実験を行なう。0 に近い $\mathbf{y}$ に対し、$F(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ となる $\mathbf{x}$ を求めたいが、まず第 1 近似として $\mathbf{x}_1 = \mathbf{y}$ としてみる。そうすると、F は恒等写像と近いのだから $F(\mathbf{x}_1) - \mathbf{y}$ は、0 に近い。そのずれを、$\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 - (F(\mathbf{x}_1) - \mathbf{y})$ と補正してみる。$F(\mathbf{x}_2) - \mathbf{y}$ は 0 でないだろうから、$\mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_2 - (F(\mathbf{x}_2) - \mathbf{y})$ とさらに補正してみる。このように $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots$ をとると、$\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|$, $\|\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2\|$, $\ldots$ は急速に減少し、$\mathbf{x}_k$ は収束することが示される。

証明　$F(0) = 0$, $\mathbf{x}_1 = 0 - (F(0) - \mathbf{y})$ だから、$\mathbf{x}_0 = 0$ とおく。

$H(\mathbf{x}) = \mathbf{y} - F(\mathbf{x})$ とおくと、H のヤコビ行列 DH は 0 において、零行列であり、偏微分 $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ は U 上連続 $(\geqq 1)$ であるから、H の成分 h_i について、

$\dfrac{\partial h_i}{\partial x_j}$ は 0 に近い。正実数 ε を $\varepsilon \leqq \dfrac{1}{2n}$ ととる。すると正実数 δ で $\mathbf{x} \leqq \delta$ ならば $\left|\dfrac{\partial h_i}{\partial x_j}\right| \leqq \varepsilon$ となるものをとることができる。

h_i の偏微分の評価から H のリプシッツ定数の評価が、問 1.2.6 により得られる。

$$\|H(\mathbf{x}+\mathbf{v}) - H(\mathbf{x})\| \leqq \varepsilon n \|v\|$$

さて、$\mathbf{y}$ が、$\|\mathbf{y}\| \leqq \dfrac{\delta}{2}$ を満たすとする。

$$\mathbf{x}_0 = 0, \quad \mathbf{x}_1 = \mathbf{y}, \quad \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - (F(\mathbf{x}_k) - \mathbf{y}) \quad (k \geqq 2)$$

をとる。$\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}$ について、$\|\mathbf{x}_{k-1}\| \leqq \delta, \|\mathbf{x}_k\| \leqq \delta$ ならば、

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k\| &= \|\mathbf{x}_k - (F(\mathbf{x}_k) - \mathbf{y}) - \mathbf{x}_{k-1} + (F(\mathbf{x}_{k-1}) - \mathbf{y})\| \\
&= \|\mathbf{x}_k - F(\mathbf{x}_k) - \mathbf{x}_{k-1} + F(\mathbf{x}_{k-1})\| = \|H(\mathbf{x}_k) - H(\mathbf{x}_{k-1})\| \\
&\leqq \varepsilon n \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}\| \leqq \frac{1}{2}\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}\|
\end{aligned}$$

最後の不等式は $\varepsilon \leqq \dfrac{1}{2n}$ としたからである。これにより、

$$\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k\| \leqq \frac{1}{2^k}\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\| = \frac{1}{2^k}\|\mathbf{y}\|$$

従って、

$$\|\mathbf{x}_{k+1}\| \leqq \sum_{\ell=0}^{k} \|\mathbf{x}_{\ell+1} - \mathbf{x}_\ell\| \leqq \frac{1}{2^\ell}\|\mathbf{y}\| < 2\|\mathbf{y}\| \leqq \delta$$

従って、こうして得られる $\mathbf{x}_{k+1}$ は $\|\mathbf{x}_{k+1}\| \leqq \delta$ を満たす。こうして H のリプシッツ評価式は順に成立していることもわかる。こうして、$\mathbf{x}_k$ はコーシー列であり、$\mathbf{x}$ に収束する。収束先の $\mathbf{x}$ に対して、$\mathbf{x} = \mathbf{x} - (F(\mathbf{x}) - \mathbf{y})$ であるから、$F(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ を満たす。

このような $\mathbf{x}$ で $\|\mathbf{x}\| \leqq \delta$ を満たすものは、一意に定まる。実際、$F(\mathbf{x}_1) = \mathbf{y}_1$, $F(\mathbf{x}_2) = \mathbf{y}_2$ とすると、

$$\begin{aligned}
F(\mathbf{x}_1) - F(\mathbf{x}_2) &= \mathbf{x}_1 + (F(\mathbf{x}_1) - \mathbf{x}_1) - (\mathbf{x}_2 + (F(\mathbf{x}_2) - \mathbf{x}_2)) \\
&= \mathbf{x}_1 - H(\mathbf{x}_1) - (\mathbf{x}_2 - H(\mathbf{x}_2))
\end{aligned}$$

だから、

$$\begin{aligned}\|F(\mathbf{x}_1)-F(\mathbf{x}_2)\| &\geqq \|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2\|-\|H(\mathbf{x}_1)-H(\mathbf{x}_2)\|\\ &\geqq \|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2\|-\frac{1}{2}\|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2\| \geqq \frac{1}{2}\|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2\|\end{aligned}$$

である。従って、$\|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2\| \leqq 2\|\mathbf{y}_1-\mathbf{y}_2\|$ で、$\mathbf{x}$ は $\mathbf{y}$ により一意に定まる。$G(\mathbf{y})=\mathbf{x}$ とすると、G は $\|\mathbf{y}\| \leqq \dfrac{\delta}{2}$ で定義されており、リプシッツ連続である。

定義された G が、C^1 であることは次のように示す。

$$F(\mathbf{x}_2)-F(\mathbf{x}_1)=DF_{(\mathbf{x}_1)}(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1)+r(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)\|\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1\|$$

$\displaystyle\lim_{\mathbf{x}_2\to\mathbf{x}_1} r(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)=0$ であるが、書き直すと、

$$\begin{aligned}&\mathbf{y}_2-\mathbf{y}_1\\ &=DF_{(G(\mathbf{y}_1))}(G(\mathbf{y}_2)-G(\mathbf{y}_1))+r(G(\mathbf{y}_1),G(\mathbf{y}_2))\|G(\mathbf{y}_2)-G(\mathbf{y}_1)\|\end{aligned}$$

従って、

$$\begin{aligned}&G(\mathbf{y}_2)-G(\mathbf{y}_1)\\ &=DF_{(G(\mathbf{y}_1))}{}^{-1}(\mathbf{y}_2-\mathbf{y}_1)-r(G(\mathbf{y}_1),G(\mathbf{y}_2))\frac{\|G(\mathbf{y}_2)-G(\mathbf{y}_1)\|}{\|\mathbf{y}_2-\mathbf{y}_1\|}\|\mathbf{y}_2-\mathbf{y}_1\|\end{aligned}$$

である。もしも、$DF=1-DH$ で DH の各成分の絶対値が $\dfrac{1}{2n}$ 以下であるとすると、DH^k の各成分の絶対値は $\dfrac{1}{2^k n}$ 以下である。従って、$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} DH^k$ は絶対収束し、DF^{-1} を与える。従って、$G(V)$ において DF は可逆である。また、$\dfrac{\|G(\mathbf{y}_2)-G(\mathbf{y}_1)\|}{\|\mathbf{y}_2-\mathbf{y}_1\|} \leqq 2$ である。従って、$\displaystyle\lim_{\mathbf{y}_2\to\mathbf{y}_1} r(G(\mathbf{y}_1),G(\mathbf{y}_2))\frac{\|G(\mathbf{y}_2)-G(\mathbf{y}_1)\|}{\|\mathbf{y}_2-\mathbf{y}_1\|}=0$ ゆえ、$G(\mathbf{y})$ は全微分可能である。全微分は、$DF_{(G(\mathbf{y}_1))}{}^{-1}$ で、$\mathbf{y}_1$ に対して連続である。従って、G は C^1 級である。さて、$DF_{(G(\mathbf{y}))}{}^{-1}$ は、

$$\begin{array}{ccccccc} V & \xrightarrow{G} & U & \xrightarrow{DF} & GL(n;\mathbf{R}) & \xrightarrow{\bullet^{-1}} & GL(n;\mathbf{R})\\ \mathbf{y} & \longmapsto & G(\mathbf{y}) & \longmapsto & DF_{(G(\mathbf{y}))} & \longmapsto & DF_{(G(\mathbf{y}))}{}^{-1}\end{array}$$

という合成写像である。ここで、仮定から DF は C^{r-1} 級写像、$\bullet^{-1}$ は C^∞ 級写像である。$r \geqq 2$ とすると、$r-1 \geqq 1$ であり、上に示した G が C^1 級で

あることから、$DG = DF_{(G(\mathbf{y}))}{}^{-1}$ は C^1 級となり，G は C^2 級となる。同様に、G が C^s 級が示されると、$s \leqq r-1$ のとき、$DG = DF_{(G(\mathbf{y}))}{}^{-1}$ は C^s 級となり、G は C^{s+1} 級であることがわかる。従って G は C^r 級である。 ■

これで、ヤコビ行列が単位行列のときの逆写像定理が示された。

0.3.2　一般の場合の逆写像定理

一般の場合の逆写像定理の証明は、容易である。

証明　$A = DF_{(\mathbf{x}^0)}$ とし、$L(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0) + F(\mathbf{x}^0)$ とおく。A は可逆行列（正則行列）であるから、L は逆写像 $L^{-1}(\mathbf{y}) = A^{-1}(\mathbf{y} - F(\mathbf{x}^0)) + \mathbf{x}^0$ をもつ。

$$
\begin{array}{ccc}
U & \xrightarrow{\ \ F\ \ } & \mathbf{R}^n \\
\bullet + \mathbf{x}_0 \uparrow & & \uparrow L \\
U_0 & \xrightarrow[F_0]{\quad\quad} & \mathbf{R}^n
\end{array}
$$

$F_0 = \mathbf{x} \longmapsto L^{-1}F(\mathbf{x}+\mathbf{x}_0)$ とおくと、$F(\mathbf{x}) = L(F_0(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0))$ であるが、$DF_0(0) = DL^{-1}{}_{(F(\mathbf{x}_0))}DF_{(\mathbf{x}_0)} = A^{-1}A = 1$ であるから、F_0 は 0 の近傍 V_0 上定義された局所的な逆写像 $G_0 : V \longrightarrow \mathbf{R}^n$ をもつ。

そこで、　$G(\mathbf{y}) = G_0(L^{-1}(\mathbf{y})) + \mathbf{x}_0$ とおくと、G は $F(\mathbf{x}_0)$ の近傍 V で定義され、

$$
\begin{aligned}
F(G(\mathbf{y})) &= L(F_0(G_0(L^{-1}(\mathbf{y})) + \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_0)) \\
&= L(F_0(G_0(L^{-1}(\mathbf{y})))) = L(L^{-1}(\mathbf{y})) = \mathbf{y},
\end{aligned}
$$

$G(V)$ 上で、

$$
\begin{aligned}
G(F(\mathbf{x})) &= G_0(L^{-1}(L(F_0(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)))) + \mathbf{x}_0 \\
&= G_0(L^{-1}(L(F_0(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)))) + \mathbf{x}_0 \\
&= G_0(F_0(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)) + \mathbf{x}_0 = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}
\end{aligned}
$$

である。G は C^r 級写像の合成であるから、C^r 級である。 ■