前の章で、ユークリッド空間の中の多様体上の関数を考えるときも、ユークリッド空間の中の多様体と線形部分空間の位置関係を考えるときも、多様体のパラメータ表示が重要であった.

$\mathbf{x}^0 \in M \subset \mathbf{R}^n$ の近傍 U について、2通りのパラメータ表示が与えられていたとする. $M \cap U = \{\varPhi(\mathbf{u}) \mid \mathbf{u} \in W_1\}$, $M \cap U = \{\varPsi(\mathbf{u}) \mid \mathbf{u} \in W_2\}$ とする。$\mathbf{x}^0 = \varPhi(\mathbf{u}_1^0) = \varPsi(\mathbf{u}_2^0)$ とすると、$\varPsi^{-1}\varPhi$ は $\mathbf{u}_1^0 \in W_1$ から $\mathbf{u}_2^0 \in W_2$ への写像であるが, これは C^∞ 級である.

実際、グラフ表示もともに考え、$\mathbf{R}^n$ の座標の順序を入れ替え、$M \cap U = \{(x_1, \dots, x_p, G(x_1, \dots, x_p)) \mid (x_1, \dots, x_p) \in W_0\}$ と書かれているとしよう。このとき、$D\varPsi$ のヤコビ行列 $\Big(\dfrac{\partial \psi_i}{\partial x_j}\Big)_{i=1,\dots,n;j=1,\dots,p}$ のうち、$\Big(\dfrac{\partial \psi_i}{\partial x_j}\Big)_{i=1,\dots,p;j=1,\dots,p}$ は可逆行列である。すなわち、$A : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^p$ を最初の p 個の成分への射影とすると、$A \circ \varPsi$ は、逆写像定理の仮定を満たす。従って、定義されている逆写像 $(A \circ \varPsi)^{-1} : W_0 \longrightarrow W_2$ は C^∞ 級である。

$\varPsi^{-1}\varPhi = (A \circ \varPsi)^{-1} \circ A \circ \varPhi$ であり、$A \circ \varPhi$, $(A \circ \varPsi)^{-1}$ は C^∞ 級だから $\varPsi^{-1}\varPhi$ は C^∞ 級の写像となる。

ここで、$\varPsi^{-1}\varPhi$ が C^∞ 級であることは、$\mathbf{R}^n$ の中にあることを仮定しなくとも書き表すことのできる命題である.

この性質が、解析が行なえることの本質であるという認識が、微分可能多様体の定義を与える契機となった.

0.1　微分可能多様体の定義

定義 0.1.1　M が n 次元微分可能多様体であるとは、M がハウスドルフ空間であり、次のような近傍 U_i と、U_i から n 次元ユークリッド空間の開集合への同相写像 $\varphi_i : U_i \longrightarrow \varphi_i(U_i) \subset \mathbf{R}^n$ が存在することである. $\displaystyle\bigcup_i U_i = M$, $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ のとき、

$$\varphi_i \circ ({\varphi_j}^{-1}|\varphi_j(U_i \cap U_j)) : \varphi_j(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$$

が C^∞ 級である。

注意 0.1.2　$r \geqq 1$ に対して、上の C^∞ を C^r に替えたものが C^r 級多様体の定義

となる。

注意 0.1.3 通常は、M が上に定義した多様体の上で同値となる次の仮定の一つを満たすとする.（これはパラコンパクトと呼ばれる性質とも同値となる。本書ではパラコンパクトの定義を与えない。[松島] を参照のこと。）

- M は第 2 可算公理を満たす。すなわち、可算個の開集合があってどのような開集合もその部分族の和集合となる.
- M に対して、稠密な可算集合が存在する。
- M は σ コンパクトである。すなわち、M はコンパクト部分集合の可算増大列の和集合である.

【例 0.1.4】 ユークリッド空間の中の多様体といってこれまで議論してきたものは、微分可能多様体である．ユークリッド空間は、もちろんハウスドルフ空間であるから、部分空間として、ユークリッド空間の中の多様体はハウスドルフ空間である．座標変換が C^∞ 級であることは上に述べたとおりである．また、ユークリッド空間は第 2 可算公理を満たすから、部分空間として、ユークリッド空間の中の多様体も第 2 可算公理を満たす.

【例 0.1.5】 $\mathbf{R}^n$ の 2 次曲面 $Q = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbf{R}^n \mid \displaystyle\sum_{i,j=1,\dots,n} a_{ij}x_ix_j = b$ について。$a_{ij} = a_{ji}, \det(a_{ij}) \neq 0, b \neq 0$ とする。$f(x_1,\dots,x_n) = \displaystyle\sum_{i,j=1,\dots,n} a_{ij}x_ix_j$ とおくと、

$$Df(x_1,\dots,x_n) = (2\sum_{j=1}^n a_{1j}x_j,\dots,2\sum_{j=1}^n a_{nj}x_j)$$

となる。これは $A = (a_{ij}), \mathbf{x} = (x_1,\dots,x_n)$ と置くと、$2\mathbf{x}A$ である。$\det A \neq 0$ としたから、$Df(\mathbf{x}) = 0$ となる $\mathbf{x}$ は $\mathbf{x} = 0$ である。しかし、$f(0) = 0 \neq b$ だから、Q は $\mathbf{R}^n$ の超曲面である。

Q の形は A の正の固有値の数、負の固有値の数 (A の符号数) によって異なる。A は対称行列だから直交行列 P により、対角化される。P による $\mathbf{R}^n$ の座標変換を行なうと、新しい座標 $(X_1,\dots,X_n)$ で $Q = \displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i X_i^2 = b$ のように書かれる。このとき、$U_i^\pm = Q \cap \{\pm X_i > 0\}$ として、$\varphi_i^\pm(X_1,\dots,X_n) = (X_1,\dots,X_{i-1},X_{i+1},\dots,X_n)$ とすると、$\varphi_i^\pm(U_i^\pm)$

の点 $(X_1,\dots,X_{i-1},X_{i+1},\dots,X_n)$ に対し、$X_i = \pm\sqrt{\frac{1}{\lambda_i}(b-\sum_{j\neq i}\lambda_j X_j^2)}$ として、$U_i^{\pm}$ の点 $(X_1,\dots,X_{i-1},X_i,X_{i+1},\dots,X_n)$ が対応する。従って $\{(U_i^{\sigma},\varphi_i^{\sigma})\}_{i=1,\dots,n;\sigma=\pm}$ が座標近傍系となる。

【例 0.1.6】 n_1 次元多様体 M_1, n_2 次元多様体 M_2 が与えられると、それらの直積空間 $M_1\times M_2$ は自然に n_1+n_2 次元多様体となる。$n_1=n_2=n$ ならば、それらの非連結和 (disjoint union)$M_1\sqcup M_2$ も n 次元多様体となる.

多様体上に、一つの同値関係を与えたときに、その商空間が多様体になるためには、同値関係が非常に強い条件を満たす必要がある．ユークリッド空間の中の多様体から出発しても、商空間はそのユークリッド空間の中に存在するものではない。しかし、重要な多様体には、商空間としての定義が最も自然であるものが多い。

位相空間 X とその上の同値関係 $\sim$ に対し、商空間 $X/\sim$ の位相は、射影を $p:X\longrightarrow X/\sim$ として、$V\subset X/\sim$ が開集合であることを $p^{-1}(V)\subset X$ が開集合であることとして定義する。その結果、射影 $p:X\longrightarrow X/\sim$ は連続であり、連続写像 $f:X\longrightarrow Y$ が同値類を 1 点に写すとき、誘導される写像 $\underline{f}:X/\sim\longrightarrow Y$ は連続である。

【例 0.1.7】 n を正の整数として、$S^n=\{\mathbf{x}\in\mathbf{R}^{n+1}\mid \|\mathbf{x}\|=1\}$ とする。これは、ユークリッド空間の中の多様体として定義され、多様体である．S^n 上の点 $\mathbf{x}$ に対して、$-\mathbf{x}$ をその対蹠（たいせき）点とよぶ。$\{\mathbf{x},-\mathbf{x}\}$ を同値類とする同値関係を考える．その商空間を $\mathbf{R}P^n$ と書く。$\mathbf{R}P^n$ は n 次元多様体となる。

S^n の局所座標系 $\{U_i^{\pm},\varphi_i^{\pm}\}_{i=0,\dots n;\pm=-,+}$ を

$$U_i^{\pm}=\{(x_0,\dots,x_n)\in S^n\subset\mathbf{R}^{n+1}\mid \pm x_i>0\},$$
$$\varphi_i^{\pm}(x_0,\dots,x_n)=(\frac{x_0}{x_i},\dots,\frac{x_{i-1}}{x_i},\frac{x_{i+1}}{x_i},\dots,\frac{x_n}{x_i})$$

と定義する。これは、$U_i^{\pm}$ 上連続である。逆写像は

$$\Delta_i=\sqrt{y_0^2+\cdots+y_{i-1}^2+y_{i+1}^2+\cdots+y_n^2+1}$$

として、

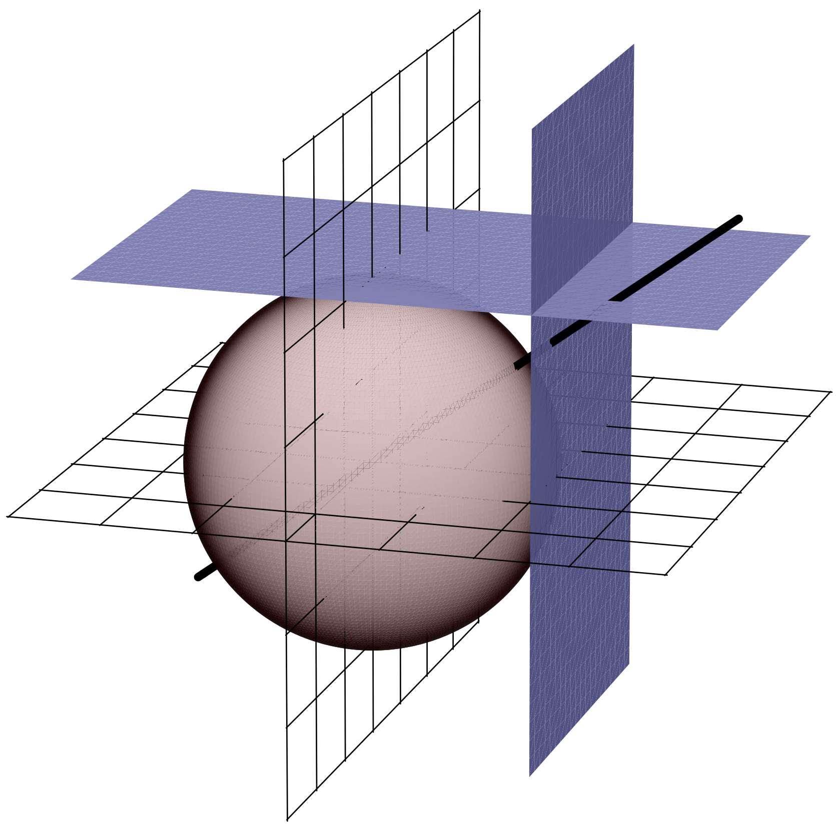

図 1　例 0.1.7 の $\varphi_i^{\pm}$

$$
\begin{aligned}
&(\varphi_i^{\pm})^{-1}(y_0, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots . y_n)\\
&= (\pm\frac{y_0}{\Delta_i}, \dots, \pm\frac{y_{i-1}}{\Delta_i}, \pm\frac{1}{\Delta_i}, \pm\frac{y_{i+1}}{\Delta_i}, \dots, \pm\frac{y_n}{\Delta_i}),
\end{aligned}
$$

でこれも連続で、$\varphi_i^{\pm}$ は U_i から $\mathbf{R}^n$ への同相写像である.

$\tau, \sigma \in \{+, -\}$ として、$\varphi_j^{\tau}(U_i^{\sigma} \cap U_j^{\tau}) \longrightarrow \varphi_i^{\sigma}(U_i^{\sigma} \cap U_j^{\tau})$ は、

$$
\begin{aligned}
&\{(y_0, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n \bigm| \sigma\tau y_i > 0\}\\
&\longrightarrow \{(y_0, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n \bigm| \sigma\tau y_j > 0\}
\end{aligned}
$$

という写像で $i < j$ ならば以下のように計算される. ($i > j$ でも同様である.)

$$
\begin{aligned}
&\varphi_i^{\sigma}(\varphi_j^{\tau})^{-1}(y_0, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_n)\\
&= \varphi_i^{\sigma}(\tau\frac{y_0}{\Delta_j}, \dots, \tau\frac{y_{j-1}}{\Delta_j}, \tau\frac{1}{\Delta_j}, \tau\frac{y_{j+1}}{\Delta_j}, \dots, \tau\frac{y_n}{\Delta_j})\\
&= (\frac{y_0}{y_i}, \dots, \frac{y_{i-1}}{y_i}, \frac{y_{i+1}}{y_i}, \dots, \frac{y_{j-1}}{y_i}, \frac{1}{y_i}, \frac{y_{j+1}}{y_i}, \dots, \frac{y_n}{y_i})
\end{aligned}
$$

これは、C^{∞} 級の写像である. 従って、S^n は n 次元多様体である.

さて、多様体を定義する写像 $\varphi_i^{\pm}$ は $\{\mathbf{x}, -\mathbf{x}\}$ で同じ値をもつ。従って、$V_i = \{[\mathbf{x}] \in \mathbf{R}P^n \bigm| x_i \neq 0\}$ とし、$\varphi_i([\mathbf{x}]) = \varphi_i^{\pm}(\mathbf{x})$ と置くと、φ_i は定義され連続である. φ_i の逆写像 ${\varphi_i}^{-1}$ については、S^n の点として、$\pm$ を除いて定まるから、$\mathbf{R}P^n$ の点として定まる。$\mathbf{y}_i = (y_0, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_n)$ に対し、${\varphi_i}^{-1}(\mathbf{y}_i) = \{(\varphi_i^{+})^{-1}(\mathbf{y}_i), (\varphi_i^{-})^{-1}(\mathbf{y}_i)\}$ であり、${\varphi_i}^{-1} = p \circ (\varphi_i^{+})^{-1} = p \circ (\varphi_i^{-})^{-1}$ であるから、${\varphi_i}^{-1}$ は連続であり、φ_i は同相となる。

$\varphi_j(V_i \cap V_j) \longrightarrow \varphi_i(V_i \cap V_j)$ は

$$
\begin{aligned}
&\{(y_0, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n \bigm| y_i \neq 0\}\\
&\longrightarrow \{(y_0, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n \bigm| y_j \neq 0\}
\end{aligned}
$$

という写像で、上と同じ式で、定義され、これは C^{∞} 級である.

問題は $\mathbf{R}P^n$ がハウスドルフ空間かどうかである. 商空間はハウスドルフになるとは限らないので、これはチェックが必要である.

ところが、$\mathbf{R}P^n$ 上で、$[\mathbf{x}^1] \neq [\mathbf{x}^2]$ とすると、S^n 上で $\mathbf{x}^1 \neq \pm\mathbf{x}^2$ である。S^n はハウスドルフ空間であるから、$\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2$ に対し、開集合 W_+, W'_+ で $\mathbf{x}^1 \in W_+$, $\mathbf{x}^2 \in W'_+$, $W_+ \cap W'_+ = \emptyset$ を満たすものが存在する。また、開集合 W_-, W'_- で $\mathbf{x}^1 \in W_-$, $-\mathbf{x}^2 \in W'_-$, $W_- \cap W'_- = \emptyset$ を満たすものも存在する。このと

き、$U = W_+ \cap W_-$, $V = W'_+ \cap -W'_-$ を考えると、$\mathbf{x}_1 \in U$, $\mathbf{x}_2 \in V$ であるから、$[\mathbf{x}_1] \in [U]$, $[\mathbf{x}_2] \in [V]$ である。ここで、部分集合 $A \subset S^n$ に対し、$-A = \{-x \mid x \in A\}$ としている。$p^{-1}([U]) = U \cup -U$ だから $[U]$ は $\mathbf{R}P^n$ の開集合であり、同様に、$p^{-1}([V]) = V \cup -V$ だから $[V]$ も $\mathbf{R}P^n$ の開集合である。

$$U \cap V \subset W_+ \cap W'_+ = \emptyset, \quad U \cap -V \subset W_- \cap W'_- = \emptyset,$$
$$-U \cap V = -(U \cap -V) = \emptyset, \quad -U \cap -V = -(U \cap V) = \emptyset$$

となるから、$p^{-1}([U] \cap [V]) = (U \cup -U) \cap (V \cup -V) = \emptyset$ 従って、$[U] \cap [V] = \emptyset$ で $\mathbf{R}P^n$ はハウスドルフ空間となる.

上の例の面白いところは $\mathbf{x} \in S^n$ に対して、対蹠点（たいせきてん）$-\mathbf{x}$ を対応させる写像 F は連続で、$F \circ F = \mathrm{id}_{S^n}$ を満たすことである. id_{S^n} は S^n の恒等写像である。従って F の逆写像は F 自身で、F は S^n の同相写像である。$\{\mathrm{id}_{S^n}, F\}$ は写像の結合について群をなし、$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ と同型である.

一般に位相空間 X の同相写像の集合 $G = \{f_i \mid i \in I\}$ が、写像の結合、逆写像をとる操作について、閉じているときに G を位相空間 X の変換群という。群の構造だけを取り出した群を $\underline{G}$ とするとき、群 $\underline{G}$ が位相空間 X に作用するという。S^n の $\{\mathrm{id}_{S^n}, F\}$ の場合、この言い方では、$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ が S^n に作用していると言うことである.

位相空間 X の変換群 $G = \{f_i \mid i \in I\}$ に対し、X 上の同値関係を、

$$x \sim y \iff G \text{ のある元 } f_i \text{ に対し、} f_i(x) = y$$

となることと定義する。G が群をなすことから同値関係であることが確かめられる. この同値類の集合を X/G と書く。$\mathbf{R}P^n = S^n/\{\mathrm{id}_{S^n}, F\}$ となる。$\mathbf{R}P^n$ がハウスドルフ空間となったことは、一般に位相空間の有限変換群 F について X/F がハウスドルフ空間となると一般化される。

定理 0.1.8 位相空間の有限変換群 F について X/F がハウスドルフ空間となる.

証明 $F = \{f_1 = \mathrm{id}_X, f_2, \ldots, f_n\}$ とする。

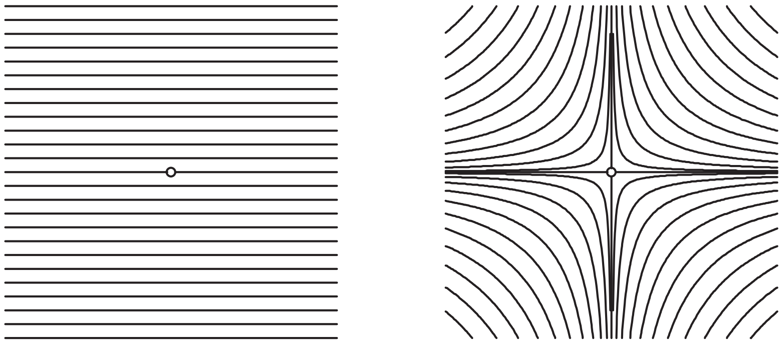

図 2 問 0.1.9

$$\{f_i(x) \mid f_i \in F\} \cap \{f_i(y) \mid f_i \in F\} = \emptyset$$

とする。$x = f_1(x)$ と $f_i(y)$ に対し、開集合 U_i, V_i で、$x \in U_i$, $f_i(y) \in V_i$, $U_i \cap V_i = \emptyset$ を満たすものが存在する．有限個の開集合の共通部分 $U = \bigcap_i U_i$ は x の開近傍、また、f_i は同相写像であるから、${f_i}^{-1}(V_i)$ は y の開近傍で有限個の開集合の共通部分 $V = \bigcap_i {f_i}^{-1}(V_i)$ は y の開近傍となる．$f_i(U) \cap f_j(V)$ に対し、${f_i}^{-1}(f_i(U) \cap f_j(V)) = U \cap ({f_i}^{-1} \circ f_j)(V)$ であるが、${f_i}^{-1} \circ f_j = f_k$ とすると、$({f_i}^{-1} \circ f_j)(V) = f_k(V) \subset V_k, U \subset U_k$ だから、${f_i}^{-1}(f_i(U) \cap f_j(V)) \subset U_k \cap V_k = \emptyset$. さて、$p : X \longrightarrow X/F$ とすると $p^{-1}(p(U)) = \bigcup_i f_i(U)$ だから、$p(U)$ は $[x]$ を含む開集合である。同様に、$p^{-1}(p(V)) = \bigcup_j f_j(V)$ だから、$p(V)$ は $[y]$ を含む開集合。$p^{-1}(p(U) \cap p(V)) = \big(\bigcup_i f_i(U)\big) \cap \big(\bigcup_j f_j(V)\big) = \emptyset$ だから、$p(U) \cap p(V) = \emptyset$ である。 ■

位相空間 X の無限変換群 G に対しては、通常は、X/G はハウスドルフにならない。

【問題 0.1.9】 xy 平面から原点を除いた位相空間を Z とする。

(1) Z の x 軸に平行な直線の連結成分のなす空間を Y とする。Y の各点 y に対し、開区間と同相な近傍が存在することを示せ。位相空間 Y はハウスドルフでないことを示せ。

(2) Z 上の関数 $f(x, y) = xy$ の等位線の連結成分のなす空間を X とする。X の各点 x に対し、開区間と同相な近傍が存在することを示せ。位相空間 X はハウスドルフでないことを示せ。

【解】 Y, X には商位相が入っている．$p_Y : Z \longrightarrow Y$, $p_X : Z \longrightarrow X$ を射

影として、商空間に入っている位相は次のようなものである．射影は連続だから、連続写像 $\mathbf{R} \longrightarrow Z$ と射影を結合したものは連続である．$Z \longrightarrow \mathbf{R}$ が連続写像で、同値類の元を同じ点に写すものは商空間からの連続写像になる。以下は、図に書いて説明するとほとんど自明なことであるが，念のために証明する．

(1) $p : Z \longrightarrow \mathbf{R}$ を $p(x, y) = y$ により定義する。p は連続写像であり、同値類の元を同じ点に写すから、連続写像 $\underline{p} : Y \longrightarrow \mathbf{R}$ を引きおこす．$f_\pm(y) = (\pm 1, y)$ により、写像 $f_\pm : \mathbf{R} \longrightarrow Z$ を定義する。連続写像 $p_Y \circ f_\pm : \mathbf{R} \longrightarrow Y$ に対して、$Y_\pm = (p_Y \circ f_\pm)(\mathbf{R})$ と置くと、$(p_Y \circ f_\pm) \circ (\underline{p}|Y_\pm) = \mathrm{id}_{Y_\pm}$, $(\underline{p}|Y_\pm) \circ (p_Y \circ f_\pm) = \mathrm{id}_{\mathbf{R}}$ だから $Y_\pm$ は $\mathbf{R}$ と同相である。従って、Y の各点 y に対し、開区間と同相な近傍 (Y_+ または Y_-) が存在する。

$y_- = p_Y(\{(x, 0) \mid x < 0\})$, $y_+ = p_Y(\{(x, 0) \mid x > 0\})$ とすると、$y_\pm \in Y_\pm$ となるが、$y_\pm$ の近傍 $V_\pm$ に対して、$V_\pm \cap Y_\pm$ も $y_\pm$ の近傍である。同相写像 $\underline{p}|Y_\pm : Y_\pm \longrightarrow \mathbf{R}$ で写した $(\underline{p}|Y_\pm)(V_\pm \cap Y_\pm)$ は $0 \in \mathbf{R}$ の近傍で、$0 \in U \subset (\underline{p}|Y_+)(V_+) \cap (\underline{p}|Y_-)(V_-)$ をとれば、$x \in U - \{0\}$ に対して、$f_+(x)$, $f_-(x)$ は、同値な点であり

$$(V_+ \cap Y_+) \cap (V_- \cap Y_-) \supset (p_Y \circ f_\pm)(U - \{0\}) \neq \emptyset$$

となる。

(2) $f(x, y)$ の連結成分は、直角双曲線の成分または x 軸、y 軸の正の部分、負の部分である。

$g_\pm(x) = (x, \pm 1)$, $h_\pm(x) = (\pm 1, x)$ と定義する。$(p_X \circ g_\pm)(\mathbf{R})$, $(p_X \circ h_\pm)(\mathbf{R})$ 上に f を制限した写像を考えると、$p_X \circ g_\pm$, $p_X \circ h_\pm$ の逆写像となり、$(p_X \circ g_\pm)(\mathbf{R})$, $(p_X \circ h_\pm)(\mathbf{R})$ は $\mathbf{R}$ と同相である．従って、X の各点 x に対し、開区間と同相な近傍が存在する。

$p_X(1, 0)$, $p_X(0, 1)$ のように一つの象限をはさむ軸の同値類は、開集合で分離できない．（$p_X(1, 0)$, $p_X(-1, 0)$ は分離できる。）実際、$p_X(1, 0) \in V_1$, $p_X(0, 1) \in V_2$ に対して、$V_1 \cap (p_X \circ g_+)(\mathbf{R})$, $V_2 \cap (p_X \circ h_+)(\mathbf{R})$ はそれぞれ $p_X(1, 0)$, $p_X(0, 1)$ の近傍、これらを f で写した像は、$0 \in \mathbf{R}$ の近傍 U を含む。$x \in U \cap \{x > 0\}$ をとると、$g_+(x)$, $h_+(x)$ は同値であり，

$$\begin{aligned} &(V_1 \cap (p_X \circ g_+)(\mathbf{R})) \cap (V_2 \cap (p_X \circ h_+)(\mathbf{R})) \\ &\supset (p_X \circ g_+)(U \cap \{x > 0\}) \cap (p_X \circ h_+)(U \cap \{x > 0\}) \neq \emptyset \end{aligned}$$

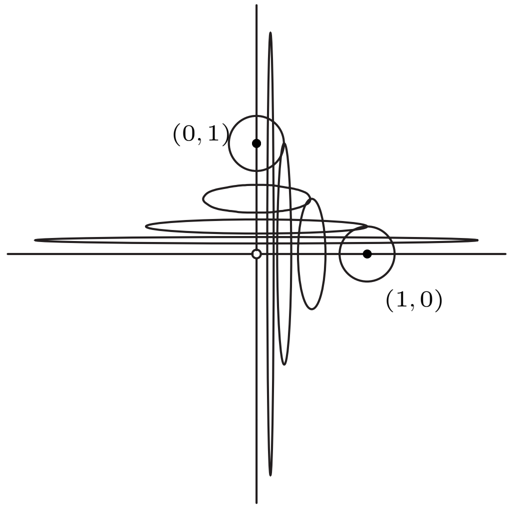

図 3　問 0.1.10

となる。

【問題 0.1.10】　xy 平面から原点を除いた位相空間を Z とする。$a > 1$ とし、$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ とおく。$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ が同値であることをある整数 n に対し、$A^n\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$ とする。これは同値関係になる。S をこの同値関係で定義される商空間とする。S の各点に対し、$\mathbf{R}^2$ と同相な近傍が存在することを示せ。位相空間 S はハウスドルフでないことを示せ。

【解】　これは、$\mathbf{Z}$ の Z 上への自由な作用による商空間の問題である。$p_S : Z \longrightarrow S$ を射影とする．$\mathbf{x}$ の同値類 $[\mathbf{x}] \in S$ をとる。$\mathbf{x} = (x, y) \in Z$ に対し、$x \neq 0$ ならば、$\dfrac{1}{\sqrt{a}}x$, $\sqrt{a}x$ を両端とする開区間 I を考え、$I \times \mathbf{R} \subset Z$ を考える。i を包含写像とする。($y \neq 0$ ならば x, y を入れ替えて同様に考える．) $W = (p_S \circ i)(I \times \mathbf{R})$ $(\subset S)$ 上で、$I \times \mathbf{R}$ に属する代表元を対応させる写像を s とする。$I \times \mathbf{R}$ と各同値類は高々 1 点で交わるから s は定義されている。s が連続であることは、$I \times \mathbf{R}$ の開集合 U は Z の開集合で、${p_S}^{-1}(s^{-1}(U)) = \displaystyle\bigcup_{n \in \mathbf{Z}} A^n(U)$ が Z の開集合となることからわかる．$s \circ (p_S \circ i) = \mathrm{id}_{I \times \mathbf{R}}$ であり、$(p_S \circ i) \circ s = \mathrm{id}_W$ であるから、W と $I \times \mathbf{R}$ は同相である。$[\mathbf{x}] \in W$ で、$I \times \mathbf{R}$ は $\mathbf{R}^2$ と同相であるから、S の各点 $[\mathbf{x}]$ に対し、$\mathbf{R}^2$ と同相な近傍が存在する。

$[(1, 0)]$ の近傍 V_1 と $[(0, 1)]$ の近傍 V_2 が必ず交わることを示す．上にとったような $[(1, 0)]$ の近傍 W_1 と x と y を入れ替えてとった $[(0, 1)]$ の近傍 W_2 をとる。$s_1 : W_1 \longrightarrow I_1 \times \mathbf{R}$, $s_2 : W_2 \longrightarrow \mathbf{R} \times I_2$ を同相写像とする。I_1, I_2

は、それぞれ x 軸上, y 軸上の開区間 $(\frac{1}{\sqrt{a}}, \sqrt{a})$ である。

$s_1(V_1 \cap W_1)$ は $I_1 \times \mathbf{R}$ の $(1,0)$ の近傍、$s_2(V_2 \cap W_2)$ は $\mathbf{R} \times I_2$ の $(0,1)$ の近傍である。従って $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \subset s_1(V_1 \cap W_1)$, $(-\varepsilon, \varepsilon) \times (1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \subset s_2(V_2 \cap W_2)$ となる $\varepsilon > 0$ が存在する。$a^n < \varepsilon$ となる n をとると、$(1, a^n) \in {p_S}^{-1}(V_1)$, $(a^n, 1) \in {p_S}^{-1}(V_2)$ となるが、これらは同値な点であるから、$V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ となる。

【例 0.1.11】 実数直線 $\mathbf{R}$ 上の同値関係 $\sim$ を、$x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ が同値 $x_1 \sim x_2$ とは $x_1 - x_2 \in \mathbf{Z}$ となることと定義する。$\mathbf{R}/\sim$ は円周 S^1 $(\subset \mathbf{R}^2)$ と同相な多様体となる.

まず、$\mathbf{R}/\sim$ が円周 S^1 と同相であることを示す．射影を $p : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}/\sim$ とする。$p([0,1]) = \mathbf{R}/\sim$ であるから、$\mathbf{R}/\sim$ はコンパクト集合の連続写像による像としてコンパクトになる．$h : \mathbf{R} \longrightarrow S^1$ を $h(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$ と定義する。h は連続で、整数 n に対し $h(x+n) = h(x)$ であるから、連続写像 $\underline{h} : \mathbf{R}/\sim \longrightarrow S^1$ が定義される．$\mathbf{x} \in S^1 \subset \mathbf{R}^2$ に対し、$\mathbf{x} = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$ を満たす x の同値類は一意的に定まる．従って、$\underline{h}$ は単射である。このとき、「コンパクト空間 X からハウスドルフ空間 Y への連続な全単射 h は同相写像である」から、$\underline{h}$ は同相写像である.

これにより、$\mathbf{R}/\sim$ がハウスドルフ空間であることがわかる。

座標近傍系を定義するために，$x \in \mathbf{R}$ が代表する点 $[x] \in \mathbf{R}/\sim$ に対し、区間 $I_x = (x - \frac{1}{4}, x + \frac{1}{4})$ を考える。$p(I_x)$ 上の点 $[y]$ に対し、$[y]$ を代表する I_x の点を対応させる写像を s_x とする。一つの同値類と I_x は高々 1 点で交わるから、s_x は定義される．I_x の開集合 U に対し、U は $\mathbf{R}$ の開集合で、$p^{-1}({s_x}^{-1}(U)) = \bigcup_{n \in \mathbf{Z}} \{x + n \mid x \in U\}$ は開集合だから、s_x は連続である. $(p|I_x) \circ s_x = \mathrm{id}_{p(I_x)}$, $s_x \circ (p|I_x) = \mathrm{id}_{I_x}$ だから、s_x は $p(I_x)$ から $I_x \subset \mathbf{R}$ への同相写像である。

$\{(p(I_x), s_x)\}_{x \in \mathbf{R}}$ が、座標近傍系となることを確かめることができる．$p(I_x) \cap p(I_y) \neq \emptyset$ とする． $z_1 \in I_x$, $z_2 \in I_y$ が $p(z_1) = p(z_2)$ をみたせば、$z_1 - z_2 = n(z_1, z_2) \in \mathbf{Z}$ である。$p(z_1') = p(z_2')$ をみたす $z_1' \in I_x$, $z_2' \in I_y$ に対し、$|z_1 - z_1'| < \frac{1}{2}$, $|z_2 - z_2'| < \frac{1}{2}$ だから、

$$n(z_1, z_2) - 1 < n(z_1', z_2') < n(z_1, z_2) + 1$$

となり、$n(z'_1, z'_2) = n(z_1, z_2)$ がわかる。従って、この整数 n により、

$$s_x \circ {s_y}^{-1} : s_y(p(I_x) \cap p(I_y)) \longrightarrow s_x(p(I_x) \cap p(I_y))$$

は、$s_x \circ {s_y}^{-1}(z) = z + n$ となり、これは C^∞ 級である.

ここでは、$y - x \in \mathbf{Z}$ ならば $\mathbf{R}/\sim$ の座標近傍 $(p(I_x), s_x)$, $(p(I_y), s_y)$ について、$p(I_x) = p(I_y)$ である。このように、同じ近傍に対し、座標関数がたくさんあっても良い。

こうして $\mathbf{R}/\sim$ は微分可能多様体の構造を持つことがわかった．座標関数 s_x は $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}/\sim$ の性質から自然に定まるもので、自然な微分可能多様体の構造と考えてよいであろう.

同値関係は整数のなす加法群 $\mathbf{Z}$ の標準的な作用によるものと理解できるので円周を $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ と表記することも多い。

念のため、「コンパクト空間 X からハウスドルフ空間 Y への連続な全単射 h は同相写像である」を示す。開集合 U の像 $h(U)$ が開集合であることを言えばよいが、$X \setminus U$ は閉集合で、X はコンパクトだから、$X \setminus U$ はコンパクト集合である。従って連続写像による像 $h(X \setminus U)$ はコンパクト集合である。Y はハウスドルフ集合だから、コンパクト集合は閉集合であるが、h は全単射であるから、$h(X \setminus U) = Y - h(U)$ となり、$Y - h(U)$ が閉集合であることから、$h(U)$ は開集合となる。

$\mathbf{R}/\sim$ がハウスドルフ空間であることを "直接" 示すのは、やや面倒である．その中でも、比較的うまい示し方は、$\mathbf{R}/\sim$ の 2 点 $[x]$, $[y]$ ($[x] \neq [y]$) に対し、$\mathbf{R}/\sim$ 上の実数値連続関数 f で、$f([x]) \neq f([y])$ となるものを作ることである.

これは、ハウスドルフという性質が、「任意の 2 点が開集合で分離される」といわれるのに対し、「任意の 2 点が関数で分離される」という性質である. $\{[z] \mid f([z]) < \dfrac{f([x]) + f([y])}{2}\}$, $\{[z] \mid f([z]) > \dfrac{f([x]) + f([y])}{2}\}$ が 2 点を分離する開集合となる。

$\mathbf{R}/\sim$ の点 $[x]$ に対し、$d_{[x]}([y]) = \min\{|y-x+n| \mid n \in \mathbf{Z}\}$ と定義する。$\mathbf{R}$ 上で $\min\{|y+n| \mid n \in \mathbf{Z}\}$ は整数上で 0, 整数 $+\dfrac{1}{2}$ 上で $\dfrac{1}{2}$ をとる折れ線をグラフに持ち連続な関数である．従って、それを平行移動した $\min\{|y-x+n| \mid n \in \mathbf{Z}\}$ も x を固定すると y についての連続関数で、y の同値類上で同じ値を持つから、

$d_{[x]} : \mathbf{R}/\sim \longrightarrow \mathbf{R}$ は連続関数として定義される．$d_{[x]}([y]) = 0 \iff [x] = [y]$ だから、$\mathbf{R}/\sim$ の 2 点 $[x]$, $[y]$ $([x] \neq [y])$ に対し、$d_{[x]}([y]) \neq d_{[x]}([x])$ となる。（もちろん関数 $f_{[x]}([y]) = \cos(2\pi(x-y))$ を使っても良い。）

このような考え方で前に出てきた $\mathbf{R}P^n$ を考え直すことが出来る。

【問題 0.1.12】 $\mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ 上の同値関係 $\sim$ を

$$\mathbf{x}_1 \sim \mathbf{x}_2 \iff \exists\lambda \neq 0,\ \lambda\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$$

で定義する。

(1) $(\mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim$ はハウスドルフ空間であることを示せ.

(2) $(\mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim$ は多様体であることを示せ。

【解】 (1) $[\mathbf{x}_1] \neq [\mathbf{x}_2]$ のときに、この 2 点が、関数で分離されることを示す. $\mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ 上の連続関数 $f_{[\mathbf{x}_1]}$ を $f^{[\mathbf{x}_1]}(\mathbf{x}_2) = \dfrac{|\mathbf{x}_1 \bullet \mathbf{x}_2|}{\|\mathbf{x}_1\|\,\|\mathbf{x}_2\|}$ と置く。$f^{[\mathbf{x}_1]}$ は $[\mathbf{x}_1]$ の代表元 $\mathbf{x}_1$ のとりかたによらない。また、$f^{[\mathbf{x}_1]}$ は $\mathbf{x}_2$ の同値類上同じ値となるから、連続関数 $\underline{f}^{[\mathbf{x}_1]} : (\mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim \longrightarrow \mathbf{R}$ を定義する。

シュワルツの不等式 $|\mathbf{x}_1 \bullet \mathbf{x}_2| \leqq \|\mathbf{x}_1\|\,\|\mathbf{x}_2\|$ により、$\underline{f}^{[\mathbf{x}_1]}([\mathbf{x}_2]) \leqq 1$ であるが、シュワルツの不等式の等号の時には、$\mathbf{x}_1 = \lambda\mathbf{x}_2$ が成立するから、$\underline{f}^{[\mathbf{x}_1]}([\mathbf{x}_2]) = 1$ ならば $[\mathbf{x}_2] = [\mathbf{x}_1]$ である。従って、$[\mathbf{x}_1] \neq [\mathbf{x}_2]$ のときに、この 2 点は連続関数 $\underline{f}^{[\mathbf{x}_1]}$ で分離される.

(2) $V_i = \{[\mathbf{x}] \in (\mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim \;\big|\; x_i \neq 0\}$ とし、

$$\varphi_i([x_0, \ldots, x_n]) = (\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i})$$

とする。上の式の右辺は、$\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{n+1} \;\big|\; x_i \neq 0\}$ からの、連続写像で、同値類上で同じ値を持つから，V_i 上の連続写像となる。ι_i を

$$\iota_i(x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) = (x_0, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

と定義すると、$\varphi_i \circ (p \circ \iota_i) = \mathrm{id}_{\mathbf{R}^n}$, $(p \circ \iota_i) \circ \varphi_i = \mathrm{id}_{V_i}$ となるから、φ_i は同相写像である.

$\varphi_j(V_i \cap V_j) \longrightarrow \varphi_i(V_i \cap V_j)$ は、

$$\{(y_0, \ldots, y_{j-1}, y_{j+1}, \ldots, y_n) \in \mathbf{R}^n \;\big|\; y_i \neq 0\}$$
$$\longrightarrow \{(y_0, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n) \in \mathbf{R}^n \;\big|\; y_j \neq 0\}$$

という写像で $i < j$ ならば以下のように計算される．($i > j$ でも同様である．)

$$\begin{aligned}&\varphi_i(\varphi_j)^{-1}(y_0, \ldots, y_{j-1}, y_{j+1}, \ldots, y_n)\\ &= (\frac{y_0}{y_i}, \ldots, \frac{y_{i-1}}{y_i}, \frac{y_{i+1}}{y_i}, \ldots, \frac{y_{j-1}}{y_i}, \frac{1}{y_i}, \frac{y_{j+1}}{y_i}, \ldots, \frac{y_n}{y_i})\end{aligned}$$

これは、C^∞ 級の写像である．従って、$(\mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim$ は n 次元多様体である．これはすでに現れた $\mathbf{R}P^n = S^n/\{\pm 1\}$ と同じ多様体である．座標変換の形がわかりやすいのでこちらが通常の定義である．$\mathbf{R}P^n = (\mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbf{R}^\times$ というように書くこともある。

【問題 0.1.13】 $\mathbf{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ 上の同値関係 $\sim$ を

$$\mathbf{x}_1 \sim \mathbf{x}_2 \Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbf{C} \setminus \{0\},\ \lambda \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$$

で定義する。

(1) $(\mathbf{C}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim$ はハウスドルフ空間であることを示せ.

(2) $(\mathbf{C}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim$ は実 $2n$ 次元多様体であることを示せ。

【解】 (1) $[\mathbf{x}_1] \neq [\mathbf{x}_2]$ のときに、この 2 点が、関数で分離されることを示す. $\mathbf{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ 上の連続関数 $f_{[\mathbf{x}_1]}$ を $f^{[\mathbf{x}_1]}(\mathbf{x}_2) = \dfrac{|\mathbf{x}_1 \bullet \mathbf{x}_2|}{\|\mathbf{x}_1\|\,\|\mathbf{x}_2\|}$ と置く。$f^{[\mathbf{x}_1]}$ は $[\mathbf{x}_1]$ の代表元 $\mathbf{x}_1$ のとりかたによらない。また、$f^{[\mathbf{x}_1]}$ は $\mathbf{x}_2$ の同値類上同じ値となるから、連続関数 $\underline{f}^{[\mathbf{x}_1]} : (\mathbf{C}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim \longrightarrow \mathbf{R}$ を定義する。

シュワルツの不等式 $|\mathbf{x}_1 \bullet \mathbf{x}_2| \leqq \|\mathbf{x}_1\|\,\|\mathbf{x}_2\|$ により、$\underline{f}^{[\mathbf{x}_1]}([\mathbf{x}_2]) \leqq 1$ であるが、シュワルツの不等式の等号の時には、$\mathbf{x}_1 = \lambda \mathbf{x}_2$ が成立するから、$\underline{f}^{[\mathbf{x}_1]}([\mathbf{x}_2]) = 1$ ならば $[\mathbf{x}_2] = [\mathbf{x}_1]$ である。従って、$[\mathbf{x}_1] \neq [\mathbf{x}_2]$ のときに、この 2 点は連続関数 $\underline{f}^{[\mathbf{x}_1]}$ で分離される.

(2) $V_i = \{[\mathbf{x}] \in (\mathbf{C}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim \ \big|\ x_i \neq 0\}$ とし、

$$\varphi_i([x_0, \ldots, x_n]) = (\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i})$$

とする。上の式の右辺は、$\{\mathbf{x} \in \mathbf{C}^{n+1} \ \big|\ x_i \neq 0\}$ からの連続写像で、同値類上で同じ値を持つから，V_i 上の連続写像となる。ι_i を

$$\iota_i(x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) = (x_0, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

と定義すると、$\varphi_i \circ (p \circ \iota_i) = \mathrm{id}_{\mathbf{C}^n}$, $(p \circ \iota_i) \circ \varphi_i = \mathrm{id}_{V_i}$ となるから、φ_i は同相

写像である.

$\varphi_j(V_i\cap V_j)\longrightarrow\varphi_i(V_i\cap V_j)$ は、

$$\{(y_0,\dots,y_{j-1},y_{j+1},\dots,y_n)\in\mathbf{C}^n \bigm| y_i\neq 0\}$$
$$\longrightarrow\{(y_0,\dots,y_{i-1},y_{i+1},\dots,y_n)\in\mathbf{C}^n \bigm| y_j\neq 0\}$$

という写像で $i<j$ ならば以下のように計算される.（$i>j$ でも同様である.）

$$\varphi_i(\varphi_j)^{-1}(y_0,\dots,y_{j-1},y_{j+1},\dots,y_n)$$
$$=(\frac{y_0}{y_i},\dots,\frac{y_{i-1}}{y_i},\frac{y_{i+1}}{y_i},\dots,\frac{y_{j-1}}{y_i},\frac{1}{y_i},\frac{y_{j+1}}{y_i},\dots,\frac{y_n}{y_i})$$

これは、$\mathbf{C}^n$ を $\mathbf{R}^{2n}$ と考えたとき、0 でない複素数による割り算は C^∞ 級写像となるので、C^∞ 級の写像である. 従って、$(\mathbf{C}^{n+1}\setminus\{0\})/\sim$ は n 次元多様体である. これは $\mathbf{C}P^n$ と書かれる複素 n 次元（実 $2n$ 次元）多様体である. $\mathbf{C}P^n=(\mathbf{C}^{n+1}\setminus\{0\})/\mathbf{C}^\times$ のように書くこともある。

0.2　C^r 多様体の間の C^s 級写像

ユークリッド空間の間の写像が C^r 級であることを定義した。その定義には、座標の概念が必要であった. 多様体には、全体の座標は定義されていないが、局所的な座標が定義されている.

これを用いて C^r 級多様体の間の C^s 級の写像 $(s\leqq r)$ を考えると、それは、うまく定義されることがわかる.

定義 0.2.1　C^r 級多様体 M_1, M_2 を考える. 写像 $F:M_1\longrightarrow M_2$ が C^s 級であるとは、$F(x)\in M_2$ のまわりの座標近傍 (V,ψ), $F^{-1}(V)$ に含まれる $x\in M_1$ のまわりの座標近傍 (U,φ) に対して、$\psi\circ F\circ\varphi^{-1}:\varphi(U)\longrightarrow\ \psi(V)$ が C^s 級となることである。

$\psi\circ F\circ\varphi^{-1}$ が C^s 級ならば、$F(x)\in M_2$ のまわりの座標近傍を (V_1,ψ_1), $F^{-1}(V_1)$ に含まれる $x\in M_1$ のまわりの座標近傍を (U_1,φ_1) に取り替えても、$\psi_1\circ F\circ{\varphi_1}^{-1}:\varphi_1(U_1\cap U)\longrightarrow\psi_1(V_1)$ は

$$
\begin{aligned}
&\psi_1 \circ F \circ {\varphi_1}^{-1} \\
&= \psi_1 \circ (\psi^{-1} \circ \psi) \circ F \circ (\varphi^{-1} \circ \varphi) \circ {\varphi_1}^{-1} \\
&= (\psi_1 \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ F \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ {\varphi_1}^{-1})
\end{aligned}
$$

のように計算され、C^r 級、C^s 級、C^r 級の写像の合成となるから、C^s 級となる。従って、上の定義は、そのような U, V が存在するとしても、任意の U, V に対して成立するとしても同値である.

位相空間を比較する時に、連続写像を用いる。同相な 2 つの位相空間は、連続写像に対して同じ性質をもつ。

C^∞ 級多様体を比較するときには C^∞ 級写像を用いるのが自然である.

とくに、C^s 写像 $F_1 : M_1 \longrightarrow M_2$, $F_2 : M_2 \longrightarrow M_1$ で $F_1 \circ F_2 = \mathrm{id}_{M_2}$, $F_2 \circ F_1 = \mathrm{id}_{M_1}$ が成立するときに、F_1 (F_2) を C^s 級微分同相（写像）と呼ぶ.

C^r 級微分同相な 2 つの多様体は、C^s 級写像 $(s \leqq r)$ に対して同じ性質をもつ。

C^r 級多様体 M の自分自身への微分同相写像を考える.

【例 0.2.2】 n 次元球面 S^n の対蹠点（たいせきてん）写像 $\mathbf{x} \longmapsto -\mathbf{x}$ は, 微分同相写像である.

実数直線 $\mathbf{R}$ の平行移動は、微分同相写像である。

線形写像 $A : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ は $\det A \neq 0$ ならば、微分同相写像である.

C^∞ 級多様体 M の C^∞ 級微分同相写像の集合 $G = \{f_i\}_{i \in I}$ が、写像の結合、逆写像をとる操作について、閉じているときに G を多様体 M の C^∞ 級変換群という。群の構造だけを取り出した群を $\underline{G}$ とするとき、群 $\underline{G}$ が多様体 M に作用するという。

群 G の作用は写像 $G \times M \longrightarrow M$ で、$(g, x) \longmapsto g \cdot x$ と書くとき、$x \longmapsto g \cdot x$ は C^∞ 級写像で、$1 \cdot x = x$, $(g_1 g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x)$ を満たすものと定義することもできる. $x \longmapsto g \cdot x$ の逆写像は、$x \longmapsto g^{-1} \cdot x$ であり、$x \longmapsto g \cdot x$ は微分同相写像となる.（G の作用は効果的でないこともありうる. $K = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$ として、K は G の正規部分群で、商の群 G/K が、上に挙げた X の変換群の $\underline{G}$ にあたる。

多様体 M の変換群 $G = \{f_i\}$ に対して、商空間 M/G が考えられるが, M の各点 x に対し、x の近傍 U で、$\{f_i(U)\}_{i \in I}$ が交わらない、すなわち、$f_i(U) \cap f_j(U) \neq \emptyset$ ならば $f_i = f_j$ となるという性質があると、M/G の各点

y に対し、y のまわりの座標近傍 V, 同相写像 $\psi : V \longrightarrow \psi(V) \subset \mathbf{R}^n$ が存在する。さらに、座標変換も C^∞ 級となる.

実際、y の代表元 x に対して，$\{f_i(U)\}_{i\in I}$ が交わらない近傍 U をとる。U に含まれる x の座標近傍と U をおきかえて、(U, φ) を座標近傍とする。$p : M \longrightarrow M/G$ を射影として、$V = p(U)$ を考え、V の各点 v に対し、U に属する代表元 u を対応させる写像を s とする。$s : V \longrightarrow U$ は連続である。なぜならば、U の開集合 W に対し、

$$p^{-1}(s^{-1}(W)) = \bigcup_{i\in I} f_i(W)$$

f_i は（微分）同相写像であるから、$f_i(W)$ は開集合で、$p^{-1}(s^{-1}(W))$ は開集合であり、$s^{-1}(W)$ は M/G の開集合である。$s \circ p = \mathrm{id}_U$, $p \circ s = \mathrm{id}_V$ だから、s は同相写像である.

$\psi = \varphi \circ s$ とすれば、$\psi : V \longrightarrow \psi(V) \subset \mathbf{R}^n$ は同相写像である.

$\psi_1 = \varphi_1 \circ s_1$, $\psi_2 = \varphi_2 \circ s_2$, $\varphi_1 : U_1 \longrightarrow \varphi_1(U_1) \subset \mathbf{R}^n$, $\varphi_2 : U_2 \longrightarrow \varphi_1(U_2) \subset \mathbf{R}^n$, $V_1 = p(U_1)$, $V_2 = p(U_2)$ とすると $\psi_1{\psi_2}^{-1} : \psi_2(V_1 \cap V_2) \longrightarrow \psi_1(V_1 \cap V_2)$ は、$(\varphi_1 \circ s_1) \circ (\varphi_2 \circ s_2)^{-1} = \varphi_1 \circ (s_1 \circ p) \circ {\varphi_2}^{-1}$

$s_1 \circ p : U_2 \cap p^{-1}(V_1) \longrightarrow U_1$ は定義域が開集合の交わらない和 $U_2 \cap p^{-1}(V_1) = \bigsqcup_{i\in I} U_2 \cap f_i(U_1)$ に書かれ、$s_1 \circ p | U_2 \cap f_i(U_1) = {f_i}^{-1}$ となる。f_i は C^∞ 写像、すなわち、$\varphi_1 \circ f_i \circ {\varphi_2}^{-1}$ が C^∞ 写像だから、$\varphi_1 \circ (s_1 \circ p) \circ {\varphi_2}^{-1}$ も C^∞ 写像である。

問題は、再び、M/G がハウスドルフ空間かどうかである。例 0.1.10 のように、一般の C^∞ 変換群 G に対しては、判定が難しい問題である。

G が多様体の C^∞ 級有限変換群 F のときは、定理 0.1.8 によって M/F がハウスドルフ空間であることが保証されている。またこのときには、M の各点 x に対し、$\{f_i(x)\}_{i\in I}$ が、異なる点からなるとき、x の近傍 U で、$\{f_i(U)\}_{i\in I}$ が交わらない開集合からなるようなものがあることがわかるから、次の定理が成立する。

定理 0.2.3　$F = \{f_i\}_{i\in I}$ を n 次元多様体 M の C^∞ 級有限変換群とし、$f_i \in F$ が M のある点 x に対し $f_i(x) = x$ をみたすならば、$f_i = \mathrm{id}$ であるとする．このとき、M/F は n 次元 C^∞ 級多様体となる。

【例 0.2.4】　レンズ空間。$S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$ とする。p, q を互いに素な正整数とし、$f_k : S^3 \longrightarrow S^3$ を $f_k : (z_1, z_2) \longmapsto (e^{2\pi i\frac{k}{p}} z_1, e^{2\pi i\frac{kq}{p}} z_2)$ で定義する。f_k は (線形写像の制限で）C^∞ 級の写像である。$f_i \circ f_j = f_{i+j}$, $f_0 = \mathrm{id} = f_p$ であって、$\{f_0, \ldots, f_{p-1}\}$ が S^3 の C^∞ 級有限変換群となる．これは、$\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ の S^3 への作用でもある。上の定理の仮定を満たすので、S^3/F は３次元多様体となる．レンズ空間 $L_{p,q}$ と呼ばれる．

0.3　座標変換

多様体の定義の中で重要な点は、座標近傍系であるが、そこに現れる座標変換から、多様体を構成することも出来る。これは、ファイバー束、ベクトル束の全空間を多様体と考えるときに必要になる。

【問題 0.3.1】　n 次元 C^∞ 級多様体 M の座標近傍系 $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$ について、座標変換 $g_{ij} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$ は $g_{ij} = \varphi_i \circ (\varphi_j|U_i \cap U_j)^{-1}$ で定義される。$\varphi_k(U_i \cap U_j \cap U_k)$ 上で、$g_{ij} \circ g_{jk} = g_{ik}$ を満たすことを示せ。

【解】　$\mathbf{x} \in \varphi_k(U_i \cap U_j \cap U_k)$ に対し、$g_{jk}(\mathbf{x}) = \varphi_j \circ (\varphi_k|U_i \cap U_j \cap U_k)^{-1})(\mathbf{x}) \in \varphi_j(U_i \cap U_j \cap U_k)$ だから、$g_{ij}(g_{jk}(\mathbf{x}))$ は定義され、

$$\begin{aligned} g_{ij}(g_{jk}(\mathbf{x})) &= \varphi_i \circ (\varphi_j|U_i \cap U_j)^{-1} \varphi_j \circ (\varphi_k|U_i \cap U_j \cap U_k)^{-1})(\mathbf{x}) \\ &= \varphi_i \circ (\varphi_k|U_i \cap U_j \cap U_k)^{-1})(\mathbf{x}) = g_{ik}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

となる。

$V_i = \varphi_i(U_i) \subset \mathbf{R}^n$ と置く。g_{ii} を V_i の恒等写像 id_{V_i} と定義する。また $V_{ij} = \varphi_j(U_i \cap U_j) \subset V_j$, $V_{ji} = \varphi_i(U_i \cap U_j) \subset V_i$ とおくと、$g_{ij} : V_{ij} \longrightarrow V_{ji}$ は $\mathbf{R}^n$ の開集合の間の微分同相写像である。問 0.3.1 の関係式は、
$V_{ik} \cap V_{jk} \xrightarrow{g_{jk}} V_{ij} \cap V_{kj} \xrightarrow{g_{ij}} V_{ji} \cap V_{ki}$ の結合が
$V_{ik} \cap V_{jk} \xrightarrow{g_{ik}} V_{ji} \cap V_{ki}$ に等しいというものである。さらに $V_{ii} = V_i$ と置くと、i, j, k のうちの２つが等しい場合にも成立している。

一般に V_i を $\mathbf{R}^n$ の開集合とする。$\{V_i\}_{i\in I}$ の disjoint union $\displaystyle\bigsqcup_{i\in I} V_i$ は、

$$\bigsqcup_{i\in I} V_i = \bigcup_{i\in I} V_i \times \{i\} \subset \mathbf{R}^n \times I$$

と定義される。ただし、$\mathbf{R}^n$ にはユークリッド空間としての位相、添え字の集合 I には、離散位相を入れ、$\bigsqcup_{i\in I} V_i$ には $\mathbf{R}^n \times I$ の直積位相から誘導された位相を考える。(一般の位相空間 $(V_i, \mathcal{O}_i)$ ($\mathcal{O}_i$ は V_i の開集合全体の集合) に対して disjoint union は集合 $\bigsqcup_{i\in I} V_i$ の開集合の集合を $\{\bigcup_{i\in I} U_i \mid U_i \in \mathcal{O}_i\}$ として定まる。)

【問題 0.3.2】 $V_i \subset \mathbf{R}^n$, $V_{ji} \subset V_i = V_{ii}$ を開集合、$g_{ij} : V_{ij} \longrightarrow V_{ji}$ を C^∞ 級写像で、$g_{ii} = \mathrm{id}_{V_i}$, $g_{jk}(V_{ik} \cap V_{jk}) = V_{ij} \cap V_{kj}$ かつ $V_{ik} \cap V_{jk}$ 上で、$g_{ij} \circ g_{jk} = g_{ik}$ を満たすとする。

(1) このとき $\bigsqcup_{i\in I} V_i$ 上の、次の関係 $\sim$ は同値関係であることを示せ。
$x_i \in V_i, x_j \in V_j$ に対し、 $x_i \sim x_j \iff x_j \in V_{ij} \subset V_j$ かつ $x_i = g_{ij}(x_j)$

(2) $X = (\bigsqcup_{i\in I} V_i)/\sim$ を商空間とする。X がハウスドルフ空間であると仮定すると、X は n 次元 C^∞ 級多様体となることを示せ。

(3) n 次元 C^∞ 級多様体 M の座標近傍系 $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$ から問 0.3.1 で定義した $V_i = \varphi_1(U_i)$, $V_{ij} = \varphi_j(U_i \cap U_j)$ について、(2) で構成した X は M と微分同相であることを示せ。

【解】 (1). 反射律は、$g_{ii} = \mathrm{id}_{V_i}$ から従う。対称律は、$g_{ij}g_{jk} = g_{ik}$ について、$i = k$ とすると、定義域に注意して $g_{ij}g_{ji} = \mathrm{id}_{V_{ji}}$, 同様に $g_{ji}g_{ij} = \mathrm{id}_{V_{ij}}$ となる。従って、$g_{ji} = {g_{ij}}^{-1}$ であり、対称律が従う。推移律は、$V_{ik} \cap V_{jk}$ 上で、$g_{ij} \circ g_{jk} = g_{ik}$ と $g_{jk}(V_{ik} \cap V_{jk}) = V_{ij} \cap V_{kj}$ からわかる。

(2). $p : \bigsqcup_{i\in I} V_i \longrightarrow X$ を射影とする。p は V_i から $p(V_i)$ への同相写像である。実際、$y \in p(V_i)$ に対し、$x \in V_i$ で y の代表元となるものを $s_i(y)$ とすると、V_i の 2 点が同値ならば (1) により同じ点になるから、s_i は定義される。s_i が連続であることは、V_i の開集合 W に対し、${s_i}^{-1}(W)$ が開集合、商位相の定義から、$p^{-1}({s_i}^{-1}(W)) \in \bigsqcup_{i\in I} V_i$ が開集合を確かめればよいが、

$$p^{-1}({s_i}^{-1}(W)) = p^{-1}(p(W)) = \bigcup_{j\in I} g_{ji}(W \cap V_{ji})$$

となり、W は $\bigsqcup_{i\in I} V_i$ の開集合、$W \cap V_{ji}$ も開集合、$g_{ji} : V_{ji} \longrightarrow V_{ij}$ は開集合の間の同相写像であるから $g_{ji}(W \cap V_{ji})$ も開集合で、その和集合として

$p^{-1}({s_i}^{-1}(W))$ は開集合となる。$p \circ s_i = \mathrm{id}_{p(V_i)}$, $s_i \circ p = \mathrm{id}_{V_i}$ だから、s_i は同相写像である。

X の座標近傍系を $\{(p(V_i), s_i)\}_{i \in I}$ とする。但し、$s_i : p(V_i) \longrightarrow V_i \subset \mathbf{R}^n$ と考える。このとき、$s_j(p(V_i) \cap p(V_j)) = V_{ij} \subset V_j$, $s_i(p(V_i) \cap p(V_j)) = V_{ji} \subset V_i$ であり、$s_i \circ {s_j}^{-1} = g_{ij}$ は C^∞ 級である。X はハウスドルフと仮定したから、X は C^∞ 級多様体となる。

(3). M の座標近傍系 $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ に対し、$V_i = \varphi_i(U_i)$, $V_{ij} = \varphi_j(U_i \cap U_j)$, $g_{ij} = \varphi_i \circ (\varphi_j | U_i \cap U_j)^{-1} : V_{ij} \longrightarrow V_{ji}$ とした。$\iota : \bigsqcup_{i \in I} V_i \longrightarrow M$ を $x_i \in V_i$ に対し、$\iota(x_i) = {\varphi_i}^{-1}(x_i)$ と定義すると、$x_i \in V_{ji}$ に対し、$\iota(g_{ji}(x_i)) = \iota(x_i)$ となるから、連続写像 $\underline{\iota} : X \longrightarrow M$ が定義される。M の座標近傍 (U_i, φ_i) に対し、$p \circ \varphi_i : U_i \longrightarrow p(V_i)$ は、同相写像の結合で同相写像である。$\underline{\iota} \circ (p \circ \varphi_i) = \mathrm{id}_{U_i}$, $(p \circ \varphi_i) \circ (\underline{\iota} | p(V_i)) = \mathrm{id}_{p(V_i)}$ であるから、$p \circ \varphi_i$ は、$\underline{\iota}$ の逆写像を定義しており、$\underline{\iota}^{-1}$ は連続である。従って、M と X は同相で X はハウスドルフ空間である。

M の座標近傍系 $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$, X の座標近傍系 $\{(p(V_i), s_i)\}_{i \in I}$ について $\varphi_i \circ \underline{\iota} \circ {s_i}^{-1} = \mathrm{id}_{V_i}$, $s_i \circ \underline{\iota}^{-1} \circ {\varphi_i}^{-1} = \mathrm{id}_{V_i}$ だから、$\underline{\iota}$ は微分同相写像である。

【問題 0.3.3】 複素射影曲線 $\mathbf{C}P^1 = (\mathbf{C}^2 - \{0\})/\mathbf{C}^\times$ と、（２次元）球面 $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 = 1\}$ は微分同相であることを示せ。

ヒント：S^2 について、$(0,0,1)$ からの stereographic projection p_+ および $(0,0,-1)$ からの stereographic projection p_- により、座標近傍系を定義する。ただし、$p_\pm : S^2 - \{(0,0,\pm 1)\} \longrightarrow \mathbf{R}^2 = \mathbf{R}^2 \times \{0\}$ は $(0,0,\pm 1)$, $\mathbf{x}$, $(p_\pm(\mathbf{x}), 0)$ が同一直線上にあることにより定義される。

(*)　(暇な時に考える問題) stereographic projection は S^2 上の円を $\mathbf{R}^2$ の円または直線に写すことを示せ。

【解】 $p_\pm : S^2 - \{(0,0,\pm 1)\} \longrightarrow \mathbf{R}^2 = \mathbf{R}^2 \times \{0\}$ は、$p_\pm(x_1, x_2, x_3) = (\dfrac{x_1}{1 \mp x_3}, \dfrac{x_2}{1 \mp x_3})$ と書かれる。

$$(p_\pm)^{-1}(y_1, y_2) = (\frac{2y_1}{{y_1}^2 + {y_2}^2 + 1}, \frac{2y_1}{{y_1}^2 + {y_2}^2 + 1}, \pm \frac{{y_1}^2 + {y_2}^2 - 1}{{y_1}^2 + {y_2}^2 + 1})$$

である。従って、$(y_1, y_2) \neq (0,0)$ に対し、

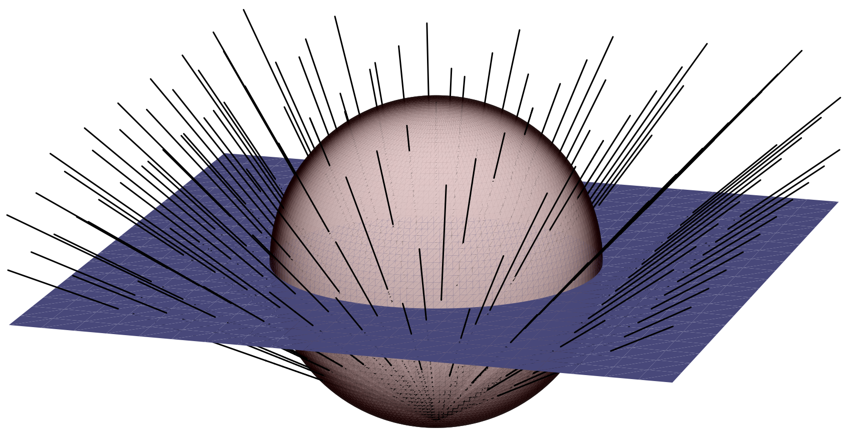

図 4　問 0.3.3 の p_-

$$(p_- \circ {p_+}^{-1})(y_1, y_2) = (\frac{y_1}{{y_1}^2 + {y_2}^2}, \frac{y_2}{{y_1}^2 + {y_2}^2})$$

である。

一方、$\mathbf{C}P^1$ に対しては、問 0.1.13 により、$\varphi_i : V_i \longrightarrow \mathbf{C}$ $(i = 0, 1)$ があり、$z \neq 0$ に対し、$(\varphi_1 {\varphi_0}^{-1})(z) = \dfrac{1}{z}$ である。

$\bar{\iota} : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ を $\bar{\iota}(x, y) = (x, -y)$ とし、S^2 に対して、p_- の替わりに $\bar{\iota} \circ p_-$ を使った座標近傍系 $\{(S^2 - \{(0,0,1)\}, p_+), (S^2 - \{(0,0,-1)\}, \bar{\iota} \circ p_-)\}$ を考える。このとき、

$$((\bar{\iota} \circ p_-) \circ {p_+}^{-1})(y_1, y_2) = (\frac{y_1}{{y_1}^2 + {y_2}^2}, -\frac{y_2}{{y_1}^2 + {y_2}^2})$$

は、$z = y_1 + y_2\sqrt{-1}$ としたときに、$(\varphi_1 {\varphi_0}^{-1})(z) = \dfrac{1}{z}$ と一致する。従って、stereographic projection による座標近傍系によって多様体とみた S^2 は、$\mathbf{C}P^1$ と微分同相である。

念のために付け加えると、$p_\pm$ は $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid x_3 \neq \pm 1\}$ 上で定義された $\mathbf{R}^2$ への C^∞ 級写像。$(p_\pm)^{-1} : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ として C^∞ 級写像である。従って $p_\pm \circ (p_\pm)^{-1} = \mathrm{id}_{\mathbf{R}^2}$ だから、そのヤコビ行列をチェインルールで計算すると $Dp_\pm D(p_\pm)^{-1} = 1$ となるから、$(p_\pm)^{-1}$ のヤコビ行列のランクは 2 である。従って、$(p_\pm)^{-1}$ は S^2 を $\mathbf{R}^3$ の中の多様体と見たときのパラメータ表示を与えている。

0.4 向きづけ

多様体 M の座標近傍系 (U_i, φ_i) に対し、$g_{ij} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$ を座標変換とする。g_{ij} のヤコビ行列式がすべて正であるような座標近傍系が存在するとき多様体は向き付けを持つという。

連結多様体 M の座標近傍系 (U_i, φ_i) に対し、$V_i = \varphi_i(U_i)$, $V_{ji} = \varphi_i(U_i \cap U_j)$ として、$g_{ij} : V_{ij} \longrightarrow V_{ji}$ を座標変換とする。$V_{i_+} \sqcup V_{i_-}$ を 2つの V_i の disjoint union として、

$$V_{i_\sigma j_\tau} = \{x_j \in V_{j_\tau} \mid \mathrm{sign}(\det Dg_{ij}(x_j))\tau = \sigma\}$$

と定義する。但し、$\mathrm{sign}(\det Dg_{ij}(x_j))$ は行列式の符号（正負）である。$V_{i_+ j_\tau} \cup$

$V_{i_-j_\tau} = V_{ij} \subset V_{j_\tau}$ で、$V_{i_+j_\tau}, V_{i_+j_\tau}$ は V_{j_τ} の開集合である。$g_{i_\sigma j_\tau} : V_{i_\sigma j_\tau} \longrightarrow V_{j_\tau i_\sigma}$ を $g_{i_\sigma j_\tau} = g_{ij}|V_{i_\sigma j_\tau}$ とおく。このとき、$g_{j_\tau k_\delta}(V_{i_\sigma k_\delta} \cap V_{j_\tau k_\delta}) = V_{i_\sigma j_\tau} \cap V_{k_\delta j_\tau}$ であり、$V_{i_\sigma k_\delta} \cap V_{j_\tau k_\delta}$ 上で $g_{i_\sigma j_\tau}\, g_{j_\tau k_\delta} = g_{i_\sigma k_\delta}$ が成立する。

$\displaystyle\bigsqcup_{i,\sigma} V_{i_\sigma}$ 上の同値関係を、

$$V_{j_\tau} \ni x_{j_\tau} \sim x_{i_\sigma} \in V_{i_\sigma} \Longleftrightarrow g_{i_\sigma j_\tau}(x_{j_\tau}) = x_{i_\sigma}$$

で定義する。商空間 $\widehat{M} = \displaystyle\bigsqcup_{i,\sigma} V_{i_\sigma}/\sim$ について $M \cong \displaystyle\bigsqcup_{i} V_i/\sim$ への写像 $P : \widehat{M} \longrightarrow M$ が得られるが、$P^{-1}(p_M(V_i)) = V_{i_+} \sqcup V_{i_-} \approx V_i \times \{-1, +1\}$ であるから、$\widehat{M}$ はハウスドルフ空間で、n 次元多様体となる。

$\widehat{M}$ 自体は常に向き付けを持つ多様体である。なぜなら、V_{i_-} への座標近傍の替わりに、$\overline{\iota} : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ を $\mathbf{R}^n$ の向きを逆転する写像 $\overline{\iota}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (-x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を座標関数に結合して、$\overline{\iota}(V_{i_-})$ への座標近傍をとる。こうすると、$\overline{\iota} \circ g_{i_-j_-} \circ \overline{\iota}, \overline{\iota} \circ g_{i_-j_+}, g_{i_+j_-} \circ \overline{\iota}, g_{i_+j_+}$ を座標変換にする座標近傍系をとることが出来るが、この座標変換のヤコビ行列式は、常に正となる。

$\widehat{M} \cong M \times \{\pm 1\}$ となることと、g_{ij} のヤコビ行列式がすべて正であるような座標近傍系が存在することは同値である。このとき多様体は向き付けを持つという。実際、g_{ij} のヤコビ行列式がすべて正のとき、$V_{i_+j_+} = V_{ij} = V_{i_-j_-}$, $V_{i_+j_-} = \emptyset = V_{i_-j_+}$ となり、$\widehat{M} \cong M \times \{\pm 1\}$ である。逆に、$\widehat{M} \cong M \times \{\pm 1\}$ とすると、$\widehat{M}$ は向き付けを持つから、その成分として M は、向き付けを持つ。

M が向き付けを持たない連結な多様体とするとき、$\widehat{M}$ は連結な向き付けを持つ多様体となる。$P : \widehat{M} \longrightarrow M$ において、$P^{-1}(y)$ の 2 点を入れ替える写像 $F : \widehat{M} \longrightarrow \widehat{M}$ は、向き付けを反対にする微分同相写像となる。

0. 5　C^∞ 級写像の存在

C^∞ 級多様体 M, N に対し、M から N への C^∞ 級写像全体を $C^\infty(M, N)$ と書く。問題は $C^\infty(M, N)$ が、十分たくさんの元を持つことを示すこととそれが示されたときに、$C^\infty(M, N)$ に入るトポロジーを考察することである。

$\mathbf{R}$ の開区間 (a, b) から N への C^∞ 級写像を N 上の曲線と呼ぶが、これは $C^\infty((a, b), N)$ の元である。$C^\infty(\mathbf{R}, N)$ の元を構成することは、N の座標近傍に値をもつ (a, b) からの写像を作ればよく、容易である。

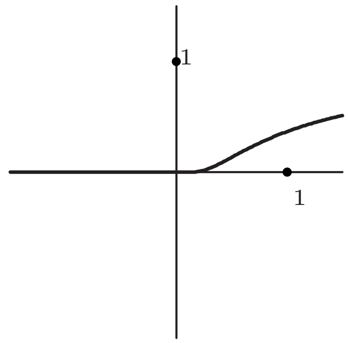

図 5　問 0.5.1 の $e^{-\frac{1}{x}}$ のグラフ

一方、$\mathbf{R}$ への C^∞ 級写像 $M \longrightarrow \mathbf{R}$ を M 上の関数と呼ぶが、これは $C^\infty(M,\mathbf{R})$ の元である。$C^\infty(M,\mathbf{R}) = C^\infty(M)$ とも書かれる。この関数の集合が、多くの元を持つことが、多様体論の存立の基盤のひとつである。実際、M がユークリッド空間の中の多様体とすると、包含写像 $M \longrightarrow \mathbf{R}^n$ 自体が C^∞ 級写像である。またユークリッド空間上の C^∞ 級関数の M への制限も M 上の C^∞ 級関数であり、$C^\infty(M)$ は非常に多くの元を持つことになる。

次の関数は、後で M 上の C^∞ 級関数を構成するために用いられる。

【問題 0.5.1】　(1) $n \geqq 0$ を整数とするとき、$\displaystyle\lim_{x\searrow 0} \frac{1}{x^n} e^{-\frac{1}{x}} = 0$ を示せ。
($y > 0$ のとき、$e^y > \dfrac{y^n}{n!}$ を使っても良い。)
(2) 連続関数 $f : [0,\infty) \longrightarrow \mathbf{R}$ が、$(0,\infty)$ で微分可能かつ導関数 $f'(x)$ が $(0,\infty)$ で連続とする。$\displaystyle\lim_{x\searrow 0} f'(x)$ が存在するならば、$\displaystyle\lim_{x\searrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x}$ は存在し、$\displaystyle\lim_{x\searrow 0} f'(x)$ に等しいことを示せ。　（平均値の定理）
(3) 関数 $\rho : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ を $\rho(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & (x > 0) \\ 0 & (x \leqq 0) \end{cases}$ で定義すると、ρ は C^∞ 級であることを示せ。
（ρ の m 回微分した式の形が (1) の形の式の 1 次結合となることを示す。）
(4) C^∞ 級の単射 $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^2$ で、$f(\mathbf{R}_{>0}) = \mathbf{R}_{>0} \times \{0\}$, $f(\mathbf{R}_{<0}) = \{0\} \times \mathbf{R}_{<0}$ を満たすものを構成せよ。（同じように $\mathbf{R}^n$ の連結な折れ線は $\mathbf{R}$ からの C^∞ 級写像の像となる。）

【解】　(4). $F(t) = (\rho(t), -\rho(-t))$ とすればよい。

$\mathbf{R}^n$ の連結な折れ線については、まず、$f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ を $t \longmapsto \displaystyle\int_0^t \rho(s)\rho(1-s)\,\mathrm{d}\,s \Big/ \int_0^1 \rho(s)\rho(1-s)\,\mathrm{d}\,s$ により定義する。これは、0, 1 におけ

る m 階微分 $(m \geqq 1)$ が 0 であるような単調増加な全射である。そこで、$\mathbf{R}^n$ の点 $\mathbf{x}_k$ $(k \in \mathbf{Z})$ を順に結んで得られる折れ線に対し、$\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^n$ を $[k, k+1]$ 上で、$t \longmapsto \mathbf{x}_k + f(t-k)(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k)$ と定めると、これは C^∞ 級の写像で $\mathbf{x}_k$ $(k \in \mathbf{Z})$ を順に結んで得られる折れ線を像にしている。