接束

多様体 M の点 x における接ベクトル空間 T_xM を全ての点 x にわたって disjoint union をとった集合を考える。この集合に自然な位相を考え、$2n$ 次元の多様体とすることができる。

もしも多様体 M がユークリッド空間 $\mathbf{R}^N$ 内の p 次元多様体であるとすると、$\mathbf{x}^0 \in M$ における接空間 $T_{\mathbf{x}^0}M$ は $\mathbf{x}^0$ を基点とする $\mathbf{R}^N$ の p 次元部分空間である。これらの和を単純にとると、これは disjoint union とならないことも多いが、$\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$ の中の、$\{\mathbf{x}^0\} \times T_{\mathbf{x}^0}M$ については和をとることができる。すなわち、

$$\{(\mathbf{x},\mathbf{v}) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N \mid \mathbf{x} \in M, \mathbf{v} \in T_{\mathbf{x}}M\}$$

はユークリッド空間の中の $2p$ 次元多様体となる。

一般の多様体に対してもこのような多様体を定義することが出来る。

M の座標近傍系 $\{(U_i,\varphi_i)\}_{i\in I}$ をとり、$V_i = \varphi_{U_i}$, $V_{ij} = \varphi_j(U_i \cap U_j)$, $g_{ij} = \varphi_i \circ (\varphi_j|U_i \cap U_j)^{-1} : V_{ij} \longrightarrow V_{ji}$ とする。$\displaystyle\bigsqcup_{i\in I} V_i$ において、

$$V_{ji} \ni x_i \sim x_j \in V_{ij} \Longleftrightarrow x_i = g_{ij}(x_j)$$

と定義すると, $\sim$ は同値関係であり、$X = (\displaystyle\bigsqcup_{i\in I} V_i)/\sim$ は M と微分同相な多様体となることを示した。

さらに、disjoint union $\displaystyle\bigsqcup_{i\in I}(V_i \times \mathbf{R}^n)$ を考えて、その上の、関係 $\sim$ を

$$V_{ji} \times \mathbf{R}^n \ni (x_i, v_i) \sim (x_j, v_j) \in V_{ij} \times \mathbf{R}^n \Longleftrightarrow x_i = g_{ij}(x_j), v_i = Dg_{ij(x)}v_j$$

と定義する。

写像 $G_{ij} : V_{ji} \times \mathbf{R}^n \longrightarrow V_{ij} \times \mathbf{R}^n$ を $G_{ij}(x_j, v_j) = (g_{ij}(x_j), Dg_{ij(x_j)}v_j)$ で定義すると、これは微分同相写像であり、$G_{ii} = \mathrm{id}_{V_i \times \mathbf{R}^n}$ とすると、$G_{ij}G_{jk} = G_{ik}$ を満たす。従って、$\displaystyle\bigsqcup_{i\in I}(V_i \times \mathbf{R}^n)$ 上の関係 $\sim$ は同値関係であり、

$Y = \displaystyle\bigsqcup_{i\in I}(V_i \times \mathbf{R}^n)/\sim$ がハウスドルフであれば、$2n$ 次元多様体となる。

さて、$\displaystyle\bigsqcup_{i\in I}(V_i \times \mathbf{R}^n) \longrightarrow \bigsqcup_{i\in I} V_i$ を第１成分への射影を集めた写像とする。これは同値類を同値類に写すので、写像 $P : Y \longrightarrow X$ が定義される。この写像は、連続な全射である。実際、連続性は開集合 $W \in X$ に

対して、

$$p_Y^{-1}(P^{-1}(W)) = \mathrm{pr}_1{}^{-1}(p_X^{-1}(W)) = p_X^{-1}(W) \times \mathbf{R}^n$$

は $\bigsqcup_{i \in I}(V_i \times \mathbf{R}^n)$ の開集合である。

さて、$p_X|V_i : V_i \longrightarrow p_X(V_i)$, $p_Y|(V_i \times \mathbf{R}^n) : V_i \times \mathbf{R}^n \longrightarrow p_X(V_i \times \mathbf{R}^n)$ は同相写像であり、$h_i : P^{-1}(p_X(V_i)) \longrightarrow p_X(V_i) \times \mathbf{R}^n$ という同相写像で、$\mathrm{pr}_1 \circ h_i = P$ が満たされる。このとき $\mathbf{R}^n$, X がハウスドルフであることから Y がハウスドルフであることがわかる。

こうして定義された多様体 Y は M の接束と呼ばれ、TM とかかれる。$P : Y \longrightarrow X$ から、射影 $p : TM \longrightarrow M$ が定義される。

注意

上の TM の構成で、$G_{ij} : V_{ij} \times \mathbf{R}^n \longrightarrow V_{ji} \times \mathbf{R}^n$ が、$G_{ij}G_{jk} = G_{ik}$ を満たすことが鍵となっている。この関係式は、

$G_{ij}(x_j, v_j) = (g_{ij}(x_j), Dg_{ij(x_j)}v_j)$ の $Dg_{ij(x_j)} \in GL(n; \mathbf{R})$ が, チェインルールにより $Dg_{ij(x_j)}Dg_{jk(x_k)} = Dg_{ik(x_k)}$ を満たすことにより保証されている。

一般に、$G_{ij}(x_j, v_j) = (g_{ij}(x_j), A_{ij(x_j)}v_j)$ として、$A_{ij(x_j)} \in GL(m, \mathbf{R})$ が、$A_{ij(x_j)}A_{jk(x_k)} = A_{ik(x_k)}$ を満たしていれば、$Z = \bigsqcup_{i \in I}(V_i \times \mathbf{R}^m)/\!\sim$ は $n+m$ 次元多様体になり、$P : Z \longrightarrow X$ が定義される。このような Z はベクトル束と呼ばれる。