

復習問題1 . 2変数関数 $f(x, y)$ についての陰関数定理、平面から平面への写像についての逆写像定理を述べよ。

復習問題2 . a, b, c を ± 1 とするとき、 $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ の概形を描け。

演習問題1 (チェイン ルール) . $f : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n, g : \mathbf{R}^\ell \rightarrow \mathbf{R}^m$ をともに連続微分可能な写像とする。すなわち、 $f(y) = (f_1(y_1, \dots, y_m), \dots, f_n(y_1, \dots, y_m))$, $g(x) = (g_1(x_1, \dots, x_\ell), \dots, g_m(x_1, \dots, x_\ell))$ の各成分が連続微分可能とする。 f, g のヤコビ行列は $Df = \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j} \right)_{i=1, \dots, n; j=1, \dots, m}$, $Dg = \left(\frac{\partial g_j}{\partial x_k} \right)_{j=1, \dots, m; k=1, \dots, \ell}$ である。この時、合成写像 $f \circ g : \mathbf{R}^\ell \rightarrow \mathbf{R}^n$ も連続微分可能な写像であることを示し、 $f \circ g$ のヤコビ行列 $D(f \circ g)$ について $D(f \circ g)(x) = Df(g(x))Dg(x)$ を示せ。

演習問題2 . 3次元ユークリッド空間 \mathbf{R}^3 内の点 P_1, \dots, P_k と、それらの中の2点を結ぶ線分 $C_1 = \overline{P_{i_1} P_{j_1}}, \dots, C_m = \overline{P_{i_m} P_{j_m}}$ が与えられているとする。これらの線分はお互いに端点以外では交わらず、 $\{P_1, \dots, P_k\}$ と両端のみで交わるとする。(すべて \mathbf{R}^3 の部分集合と考える。) $\{P_1, \dots, P_k\}$ とこれらの線分の和集合 X が、部分空間としての位相について1次元位相多様体となるための条件は何か。このとき、線分の個数と点の個数との間にはどのような関係があるか。

余裕があれば、 P_1, \dots, P_k の中の2点を結ぶ線分 $C_1 = \overline{P_{i_1} P_{j_1}}, \dots, C_m = \overline{P_{i_m} P_{j_m}}$ と、3点を頂点とする三角形 $T_1 = \triangle P_{u_1} P_{v_1} P_{w_1}, \dots, T_\ell = \triangle P_{u_\ell} P_{v_\ell} P_{w_\ell}$ が与えられ、これらの三角形の辺は、 C_1, \dots, C_m のどれかであり、三角形の内部と線分や $\{P_1, \dots, P_k\}$ は交わらないとする。また、線分はお互いに端点以外では交わらず、 $\{P_1, \dots, P_k\}$ と両端のみで交わるとする。 $\{P_1, \dots, P_k\}$ 、線分、三角形の和集合 Y が部分空間としての位相について2次元位相多様体となるための条件を考えてみよ。

演習問題3 .

(1) $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ を $f(x, y) = x^3 - x + y^2$ で定義するとき、 f のヤコビ行列を求めよ。

(2) (1) の f について、 $z \in \mathbf{R}$ の逆像 $f^{-1}(z)$ の各成分が滑らかな曲線となるための z の条件を求めよ。

(3) $F : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$ を $F(x, y, z) = (x^3 - zx + y^2, z)$ で定義するとき、 F のヤコビ行列を求めよ。

(4) (3) の F について、 $(s, t) \in \mathbf{R}^2$ の逆像 $F^{-1}(s, t)$ の各成分が、滑らかな曲線となるための (s, t) の条件を求めよ。

但し、 \mathbf{R}^n の滑らかな曲線 C とは、 C の各点 x に対し、 x の近傍 U と C^∞ 級写像 $f : U \rightarrow \mathbf{R}^{n-1}$ で、 U 上で $\text{rank} Df = n - 1, U \cap C = f^{-1}(f(x))$ とするものがあることである。(1次元部分多様体であること)