２００４年度幾何学特別演習 I 演習問題　　６月２８日

復習問題１． C^r 級関数 $f(x)$ に対するテーラーの定理を $f(x)-\sum_{k=0}^{r-1}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = R_r(x)$ とするとき、$\lim_{x\to 0}\frac{R_r(x)}{x^r} = \frac{f^{(r)}(0)}{r!}$ と理解することにする。

(1) C^∞ 級関数 $f(x)$ に対し、$r-1$ 次多項式 $P(x)$ が $\lim_{x\to 0}\frac{|f(x)-P(x)|}{x^{r-1}} = 0$ を満たすならば、$P(x) = \sum_{k=0}^{r-1}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$ となることを示せ。

(2) C^∞ 級関数 $f(x),\ g(x)$ に対し、多項式 $P(x),\ Q(x)$ が $\lim_{x\to 0}\frac{|f(x)-P(x)|}{x^{r-1}} = 0$, $\lim_{x\to 0}\frac{|g(x)-Q(x)|}{x^{r-1}} = 0$ を満たし、$g(0)=0$ とすると、$\lim_{x\to 0}\frac{|(f\circ g)(x)-(P\circ Q)(x)|}{x^{r-1}} = 0$ となることを示せ。

(*) (1), (2) を C^∞ 級関数 $f:\mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$, C^∞ 級写像 $g:\mathbf{R}^m \longrightarrow \mathbf{R}^n$ に対し、拡張せよ。

復習問題２． $X:\mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ をリプシッツ連続写像とする。n 次元実ベクトル空間上の常微分方程式 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{x} = X(\mathbf{x})$ の解 $F(t,\mathbf{x})$ $(F(0,\mathbf{x})=\mathbf{x})$ は初期値 $\mathbf{x}$ に対し、リプシッツ連続であることを示せ。

演習問題 １． $S^{2n+1} = \{(z_1,...,z_{n+1})\in\mathbf{C}^{n+1} \mid \sum_{k=1}^{n+1}|z_k|^2 = 1\}$ を $\mathbf{C}^{n+1}$ の単位球面とする。$U(1) = \{e^{\sqrt{-1}\theta} \mid \theta\in\mathbf{R}\}$ とする。
$U(1)\times S^{2n+1} \longrightarrow S^{2n+1}$ を
$(e^{\sqrt{-1}\theta},(z_1,...,z_{n+1})) \longmapsto (e^{\sqrt{-1}\theta}z_1,...,e^{\sqrt{-1}\theta}z_{n+1})$ で定義すると、これは群 $U(1)$ の S^{2n+1} への作用であることを示せ。

演習問題 ２． $\mathbf{C}P^n = (\mathbf{C}^{n+1}-\{0\})/\mathbf{C}^\times$ を n 次元複素射影空間とすると、$\mathbf{C}P^n$ は実 $2n$ 次元 C^∞ 級多様体である。

(1)　結合写像 $S^{2n+1} \xrightarrow{\ i\ } \mathbf{C}^{n+1}\setminus\{0\} \xrightarrow{\ p\ } \mathbf{C}P^n$ の rank を求めよ.
ヒント：$T_zS^{2n+1} \longrightarrow T_{(p\circ i)(z)}\mathbf{C}P^n$ が全射であることを $\mathbf{C}P^n$ 上の C^∞ 級曲線が、S^{2n+1} 上の C^∞ 級曲線の像になることを示して、示す。

(2)　$f(z_1,...,z_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1}k|z_k|^2 \Big/ \sum_{k=1}^{n+1}|z_k|^2$ で定義される関数 $f:\mathbf{C}^{n+1}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbf{R}$ は $\mathbf{C}P^n$ 上の C^∞ 級関数 F を誘導することを示せ.

(3)　F の臨界点 ($F_*:T_x\mathbf{C}P^n \longrightarrow \mathbf{R}$ が 0 となる点 x) を求めよ。
ヒント：合成写像 $T_zS^{2n+1} \longrightarrow T_x\mathbf{C}P^n \longrightarrow \mathbf{R}$ が 0 でない点 z の定める点 $x=[z]$ は正則点である。

(4)　F の臨界点におけるヘッセ行列を求めよ。
ヒント：復習問題１。