２００４年度幾何学特別演習Ｉ演習問題　　７月１２日

復習問題１． $\mathbf{R}^2$ 上の次で定義される同値関係を考える。

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \Longleftrightarrow \exists (m, n) \in \mathbf{Z}^2,\ (x_1 + m, y_1 + n) = (x_2, y_2)$$

この同値関係による商空間を $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ と書く。
(1)　$\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ はハウスドルフ空間であることを示せ。
(2)　$\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ は２次元多様体であることを示せ。
(3)　A を２行２列の整係数行列とするとき、線形写像 $A : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ は微分可能な写像 $F_A : \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ を定義することを示せ。
(4)　$\mathrm{rank}(F_A)_*$ を求めよ。

復習問題２． $M,\ N$ をコンパクト多様体とする。C^∞ 級写像 $f : M \longrightarrow N$ について，M 上のベクトル場 ξ，N 上のベクトル場 η が、すべての $x \in M$ に対し、$f_*(\xi(x)) = \eta(f(x))$ を満たすとする。（ $f_*\xi = \eta$ とも書かれ、M 上のベクトル場 ξ が、N 上のベクトル場 η に射影されるという。）ξ が生成するフローを $\varphi_t : M \longrightarrow M$，$\eta$ が生成するフローを $\psi_t : N \longrightarrow N$ とするとき次を示せ。

$$f(\varphi_t(x)) = \psi_t(f(x))$$

復習問題３． m 次元コンパクト多様体 M 上のフロー $\varphi_t(x)$ が、ベクトル場 ξ で生成されているとする。M の $m-1$ 次元コンパクト部分多様体 N に対し、$x \in N$ に対して、$\xi(x) \notin T_xN$ とする。このとき、正実数 ε で、写像 $(-\varepsilon, \varepsilon) \times N \ni (t, x) \longmapsto \varphi_t(x) \in M$ が M の開集合への埋め込みとなるようなものが存在することを示せ。

演習問題１． $f(x, y) = x^3 - x - y^2$ とする。f の等位線の概形を描け。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

の解曲線は、どのような図形になるか。
一般に、上の形の微分方程式の解 $(x(t), y(t))$ について、$f(x(t), y(t))$ は非減少であることを示せ。

演習問題２．　(1)　n 次元ユークリッド空間上の線型ベクトル場 $X = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_j \frac{\partial}{\partial x_i}$，$Y = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} x_j \frac{\partial}{\partial x_i}$ に対して、$[X, Y]$ を求めよ。
(2)　X が生成するフロー φ_t について、$(\varphi_t)_*Y$ を書き下し、$\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \big((\varphi_t)_*Y\big)$ を求めよ。但し、$(\varphi_t)_*Y$ はベクトル場 Y を微分同相 φ_t で写したもので、
$((\varphi_t)_*Y)(x) = (\varphi_t)_*(Y(\varphi_{-t}(x)))$ により定義される。

演習問題３．　コンパクトリーマン多様体 M について、$X \in T_xM$ に対し、$\gamma_X(t)$ を $\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = X$ となる測地線とする。
(1)　$E : T_xM \longrightarrow M$ を $E(X) = \gamma_X(1)$ で定義すると、E は T_xM の 0 の近傍から、M の x の近傍への微分同相写像となることを示せ。
(2)　写像 $F : TM \longrightarrow M \times M$ を $X \in T_xM \subset TM$ に対し、$F(X) = (x, E(X))$ で定義する。F は TM の zero section の近傍から $M \times M$ の $\Delta = \{(x, x) \mid x \in M\} \subset M \times M$ の近傍への微分同相写像となることを示せ。

演習問題４． $m > n$ とする。M, N を m 次元, n 次元コンパクト連結 C^∞ 多様体とする。C^∞ 級写像 $F : M \longrightarrow N$ を、M の任意の点 x で、接写像 $F_* : T_xM \longrightarrow T_{F(x)}N$ が全射であるものとする。このとき、N の任意の点 y に対し、次のような近傍 U_y が存在することを示せ。微分同相写像 $h : F^{-1}(U_y) \longrightarrow U_y \times F^{-1}(y)$ で $F = \mathrm{pr}_1 \circ h$ を満たすものが存在する。（ファイブレーション定理）
ヒント：M にリーマン計量を入れ、$L = F^{-1}(y)$ の法束 $\nu(L) = \{v \in T_x(M) \,|x \in L, g(v, w) = 0 \text{ for } w \in T_xL\} \subset TM$ から、M へのエクスポネンシャル・マップが、$\nu(L)$ の L の近傍から、$F^{-1}(y)$ の近傍への微分同相となることを見る。$F^{-1}(y)$ の近傍から、$F^{-1}(y)$ への射影 p が定義される。$h = (F, p)$ で定義する。

演習問題５． G をリー群（多様体であり、群の演算が C^∞ 級であるもの）とする。
(1)　G 上のベクトル場で任意の $g \in G$ に対し、$(L_g)_*\xi = \xi$ をみたすものを、左不変ベクトル場という。G 上の左不変ベクトル場全体 $\mathfrak{g}$ は $\dim G$ 次元のベクトル空間をなすことを示せ。($\mathfrak{g}$ を G のリー環と呼ぶ。)
(2)　ξ, η を左不変ベクトル場とするとき、$[\xi, \eta]$ も左不変ベクトル場であることを示せ。
(3)　$\mathbf{1}$ を G の単位元とする。左不変ベクトル場 ξ が生成する 1 パラメーター変換群を φ_t と書くとき、任意の $g \in G$ に対し、$\varphi_t(g) = g\varphi_t(\mathbf{1})$ を示せ。($\varphi_t(\mathbf{1}) = \exp(t\xi)$ と書く。)
(4)　ξ に対し、$\exp(\xi)$ を対応させる写像は、$\mathfrak{g}$ の 0 の近傍から G の $\mathbf{1}$ の近傍への微分同相写像であることを示せ。
(逆関数定理を使う。)