

復習問題1 . 関数  $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ , 写像  $F : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$  に対しての陰関数定理を述べよ。

復習問題2 . 写像  $f : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n$  が  $C^r$  級であることの定義を述べよ。

復習問題3 .  $f(x, y) = \cos x \cdot \cos y$  について、 $Df = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (0, 0)$  となる点  $(x, y)$  を求めよ。 $f(x, y)$  はその点で極大であるか、極小であるか判定せよ。

演習問題1 .  $f : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n, g : \mathbf{R}^\ell \rightarrow \mathbf{R}^m$  を  $C^\infty$  級の写像とすると、 $f \circ g : \mathbf{R}^\ell \rightarrow \mathbf{R}^n$  は  $C^\infty$  級の写像であることを示せ。

ヒント :  $C^{r-1}$  級の写像の和、積は  $C^{r-1}$  級。 $f$  が  $C^r$  級写像ならば、 $Df$  は  $C^{r-1}$  級。チェインルールを使う。

演習問題2 .  $\mathbf{R}^3$  の次の部分集合が滑らかな曲面であるかどうか論ぜよ。

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2\}$$

$$X = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid \begin{array}{l} z^2 = -\{x^2 + y^2 - 1\}\{(x+3)^2 + y^2 - 1\} \cdot \\ \{(x-3)^2 + y^2 - 1\}\{x^2 + y^2 - 25\} \end{array} \right\}$$

$$Y = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z^2 = -\{(x+1)^2 + y^2 - 1\}\{(x-1)^2 + y^2 - 1\}\}$$

但し、 $\mathbf{R}^n$  の滑らかな曲面  $S$  とは、 $S$  の各点  $x$  に対し、 $x$  の近傍  $V$  と  $C^\infty$  級写像  $f : V \rightarrow \mathbf{R}^{n-2}$  で、 $V$  上で  $\text{rank} Df = n-2$ ,  $V \cap S = f^{-1}(f(x))$  とするものがあることである。(2次元部分多様体であること)

演習問題3 .  $\mathbf{R}^3$  内の曲面  $z = x^3 + xy$  上の点  $(x_0, y_0, z_0)$  における接平面の方程式を求めよ。この接平面が  $x$  軸に平行になるような点  $(x_0, y_0, z_0)$  はどのような図形をなすか。(  $x$  軸を含む場合も平行になるという。 ) その図形の  $xy$  平面への正射影、 $xz$  平面への正射影、 $yz$  平面への正射影のみたす方程式を求めよ。

演習問題4 .  $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$  上の関数  $f$  を

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2$$

で定める。 $f(x_1, x_2, x_3)$  はどのような値をとるか。実数  $y$  に対し  $f^{-1}(y)$  はどのような図形であるかを論ぜよ。