２００４年度幾何学特別演習Ｉ演習問題　　４月２６日

復習問題１．関数 $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}$, 写像 $F : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ に対しての陰関数定理を述べよ。

復習問題２．写像 $f : \mathbf{R}^m \longrightarrow \mathbf{R}^n$ が C^r 級であることの定義を述べよ。

復習問題３．$f(x, y) = \cos x \cdot \cos y$ について、$Df = (\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}) = (0, 0)$ となる点 (x, y) を求めよ。$f(x, y)$ はその点で極大であるか、極小であるか判定せよ。

演習問題１．$f : \mathbf{R}^m \longrightarrow \mathbf{R}^n$, $g : \mathbf{R}^\ell \longrightarrow \mathbf{R}^m$ を C^∞ 級の写像とするとき、$f \circ g : \mathbf{R}^\ell \longrightarrow \mathbf{R}^n$ は C^∞ 級の写像であることを示せ。
ヒント：C^{r-1} 級の写像の和、積は C^{r-1} 級。f が C^r 級写像ならば、Df は C^{r-1} 級。チェインルールを使う。

演習問題２．$\mathbf{R}^3$ の次の部分集合が滑らかな曲面であるかどうか論ぜよ。

$$C = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 = z^2\right\}$$

$$X = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{r} z^2 = -\{x^2 + y^2 - 1\}\{(x+3)^2 + y^2 - 1\} \cdot \\ \{(x-3)^2 + y^2 - 1\}\{x^2 + y^2 - 25\} \end{array}\right\}$$

$$Y = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; z^2 = -\{(x+1)^2 + y^2 - 1\}\{(x-1)^2 + y^2 - 1\}\right\}$$

但し、$\mathbf{R}^n$ の滑らかな曲面 S とは、S の各点 x に対し、x の近傍 V と C^∞ 級写像 $f : V \longrightarrow \mathbf{R}^{n-2}$ で、V 上で $\mathrm{rank} Df = n - 2$, $V \cap S = f^{-1}(f(x))$ とするものがあることである。（２次元部分多様体であること）

演習問題３．$\mathbf{R}^3$ 内の曲面 $z = x^3 + xy$ 上の点 (x_0, y_0, z_0) における接平面の方程式を求めよ。この接平面が x 軸に平行になるような点 (x_0, y_0, z_0) はどのような図形をなすか。(x 軸を含む場合も平行になるという。) その図形の xy 平面への正射影、xz 平面への正射影、yz 平面への正射影のみたす方程式を求めよ。

演習問題４．$S^2 = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \middle| x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\right\}$ 上の関数 f を

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2$$

で定める。$f(x_1, x_2, x_3)$ はどのような値をとるか。実数 y に対し $f^{-1}(y)$ はどのような図形であるかを論ぜよ。