２００４年度幾何学特別演習Ｉ演習問題　　５月１７日

復習問題１． 位相空間 X がハウスドルフ空間ではないとする。このとき、X の相異なる２つの点で、任意の X 上の実数値連続関数の値が等しくなることを示せ。

復習問題２．
集合 X 上の同値関係 $\sim$ とは何か。
集合 X 上の同値関係 $\sim$ による商空間 $X/\sim$ とは何か。
位相空間 X 上の同値関係 $\sim$ による商空間の商位相とは何か。
$\pi : X \longrightarrow X/\sim$ を射影とするとき、$f : X/\sim \longrightarrow \mathbf{R}$ について、$F = f \circ \pi : X \longrightarrow \mathbf{R}$ が連続ならば、$f : X/\sim \longrightarrow \mathbf{R}$ は連続であることを示せ。

演習問題１． xy 平面から原点を除いた位相空間を Z とする。
(1) Z の x 軸に平行な直線の連結成分のなす空間を Y とする。Y の各点 y に対し、開区間と同相な近傍が存在することを示せ。位相空間 Y はハウスドルフでないことを示せ。
(2) Z 上の関数 $f(x, y) = xy$ の等位線の連結成分のなす空間を X とする。X の各点 x に対し、開区間と同相な近傍が存在することを示せ。位相空間 X はハウスドルフでないことを示せ。

演習問題２．
(1)　$\mathbf{R}P^n = (\mathbf{R}^{n+1} - \{0\})/\mathbf{R}^\times$ はハウスドルフ空間であることを示せ。
（ヒント：$\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{n+1} - \{0\}$ に対し、$f_\mathbf{x} : \mathbf{y} \longmapsto \dfrac{|\mathbf{x} \bullet \mathbf{y}|}{\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|}$ を考え、２点は関数で分離できることを示す。但し $\mathbf{x} \bullet \mathbf{y}$ は内積を表す。シュワルツの不等式に注意する。）

(2)　$\mathbf{R}P^n$ は n 次元 C^∞ 級多様体であることを示せ。

演習問題３．
(1)　$\mathbf{C}P^n = (\mathbf{C}^{n+1} - \{0\})/\mathbf{C}^\times$ はハウスドルフ空間であることを示せ。
（ヒント：$\mathbf{x} \in \mathbf{C}^{n+1} - \{0\}$ に対し、$f_\mathbf{x} : \mathbf{y} \longmapsto \dfrac{|\mathbf{x} \bullet \mathbf{y}|}{\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|}$ を考え、２点は関数で分離できることを示す。但し $\mathbf{x} \bullet \mathbf{y}$ はエルミート内積を表す。シュワルツの不等式に注意する。）

(2)　$\mathbf{C}P^n$ は $2n$ 次元 C^∞ 多様体であることを示せ。