２００４年度幾何学特別演習Ｉ演習問題　　５月２４日

復習問題１． X, Y を実ベクトル空間とする。
(1) 実ベクトル空間の次元の定義を述べよ。
(2) 線形写像 $X \longrightarrow Y$ の階数 (rank) の定義を述べよ。

復習問題２． 実ベクトル空間 X の部分空間 Y, Z に対し、
$\forall v \in X, \exists v_Y \in Y, v_Z \in Z, v = v_Y + v_Z$ が成立しているとする。
このとき、$\dim X, \dim Y, \dim Z, \dim Y \cap Z$ の関係を述べよ。

演習問題１． 位相空間 E, B の間に連続写像 $p : E \longrightarrow B$ があって、次の条件を満たすとする。ある位相空間 F があって、B の各点 b に対し、b の開近傍 U_b を選べば、同相写像 $h : p^{-1}(U_b) \longrightarrow U_b \times F$ で、$\mathrm{pr}_1 \circ h = p$ を満たすものが存在する。ここで pr_1 は第１成分への射影 $U_b \times F \longrightarrow U_b$ である。
B, F がハウスドルフ空間であると仮定すると、E もハウスドルフ空間となることを示せ。

演習問題２． n 次元 C^∞ 級多様体 M の座標近傍系 $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$ について、座標変換 $g_{ij} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$ は $g_{ij} = \varphi_i \circ (\varphi_j | U_i \cap U_j)^{-1}$ で定義される。

(1)　$\varphi_k(U_i \cap U_j \cap U_k)$ 上で、$g_{ij} \circ g_{jk} = g_{ik}$ を満たすことを示せ。

$V_i = \varphi_i(U_i) \subset \mathbf{R}^n$ と置く。g_{ii} は V_i の恒等写像 id_{V_i} とする。また $V_{ij} = \varphi_j(U_i \cap U_j) \subset V_j$, $V_{ji} = \varphi_i(U_i \cap U_j) \subset V_i$ とおくと、$g_{ij} : V_{ij} \longrightarrow V_{ji}$ は $\mathbf{R}^n$ の開集合の間の微分同相写像である。(1) の関係式は、$V_{ik} \cap V_{jk} \xrightarrow{g_{jk}} V_{ij} \cap V_{kj} \xrightarrow{g_{ij}} V_{ji} \cap V_{ki}$ の結合が $V_{ik} \cap V_{jk} \xrightarrow{g_{ik}} V_{ji} \cap V_{ki}$ に等しいというものである。さらに $V_{ii} = V_i$ と置くと、i, j, k のうちの２つが等しい場合にも成立している。

(2)　一般に V_i を $\mathbf{R}^n$ の開集合とする。$\{V_i\}_{i\in I}$ の disjoint union $\displaystyle\bigsqcup_{i\in I} V_i$ の定義を述べよ。

$V_i \subset \mathbf{R}^n$, $V_{ji} \subset V_i = V_{ii}$ を開集合、$g_{ij} : V_{ij} \longrightarrow V_{ji}$ を C^∞ 級写像で、$g_{ii} = \mathrm{id}_{V_i}$, $g_{jk}(V_{ik} \cap V_{jk}) = V_{ij} \cap V_{kj}$ かつ $V_{ik} \cap V_{jk}$ 上で、$g_{ij} \circ g_{jk} = g_{ik}$ を満たすとする。

(3)　$\displaystyle\bigsqcup_{i\in I} V_i$ 上の、次の関係 $\sim$ は同値関係であることを示せ。

$x_i \in V_i$, $x_j \in V_j$ に対し、　$x_i \sim x_j \iff x_j \in V_{ij} \subset V_j$ かつ $x_i = g_{ij}(x_j)$

(4)　$X = (\displaystyle\bigsqcup_{i\in I} V_i)/\sim$ を商空間とする。X がハウスドルフ空間であると仮定すると、X は n 次元 C^∞ 級多様体となることを示せ。

(5)　n 次元 C^∞ 級多様体 M の座標近傍系 $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$ から最初に定義した V_i, V_{ij} について、上で構成した X は M と微分同相であることを示せ。