

復習問題 1 . (1) $n \geq 0$ を整数とすると、 $\lim_{x \searrow 0} \frac{1}{x^n} e^{-\frac{1}{x}} = 0$ を示せ。

($y > 0$ のとき、 $e^y > \frac{y^n}{n!}$ を使っても良い。)

(2) 連続関数 $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ が、 $(0, \infty)$ で微分可能かつ導関数 $f'(x)$ が $(0, \infty)$ で連続とする。 $\lim_{x \searrow 0} f'(x)$ が存在するならば、 $\lim_{x \searrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ は存在し、 $\lim_{x \searrow 0} f'(x)$ に等しいことを示せ。(平均値の定理)

(3) 関数 $\rho : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ を $\rho(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$ で定義すると、 ρ は C^∞ 級であることを示せ。(ρ の m 回微分した式の形が (1) の形の式の 1 次結合となることを示す。)

復習問題 2 . コンパクトハウスドルフ空間 X は正規空間であることを示せ。

すなわち、 A_1, A_2 を X の閉集合、 $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ とするとき、開集合 U_1, U_2 で、 $A_1 \subset U_1, A_2 \subset U_2, U_1 \cap U_2 = \emptyset$ となるものが存在することを示せ。

復習問題 3 . コンパクトハウスドルフ空間 X の開被覆 $\{U_i\}$ に対し、 X の開被覆 $\{V_i\}$ で、 $\bar{V}_i \subset U_i$ となるものが存在することを示せ。

演習問題 1 . $GL(n; \mathbf{R})$ は、 n^2 次元 C^∞ 級多様体であることを示せ。 $SL(n; \mathbf{R})$ は、 $GL(n; \mathbf{R})$ の $n^2 - 1$ 次元 C^∞ 級部分多様体であることを示せ。

ヒント：陰関数定理。 \det の微分が $\det = 1$ の点で 0 でないことを、行列式の行あるいは列による展開を用いて示す。

演習問題 2 . $O(n) = \{A \in M(n; \mathbf{R}) \mid {}^tAA = I\}$ は $\frac{n(n-1)}{2}$ 次元 C^∞ 級多様体であることをしめせ。

ヒント：陰関数定理。 $A \mapsto {}^tAA$ の A における微分が線形写像 $X \mapsto {}^tXA + {}^tAX$ となること、この線形写像は、 $X \mapsto {}^tAX, Y \mapsto {}^tY + Y$ を結合したもので、ランクがわかる。($U(n)$ についても同様。)

演習問題 3 . 複素射影直線 $CP^1 = (\mathbf{C}^2 - \{0\})/\mathbf{C}^\times$ と、(2次元) 球面

$S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ は微分同相であることを示せ。

ヒント： S^2 について、 $(0, 0, 1)$ からの stereographic projection p_+ および $(0, 0, -1)$ からの stereographic projection p_- により、座標近傍系を定義する。

ただし、 $p_\pm : S^2 - \{(0, 0, \pm 1)\} \rightarrow \mathbf{R}^2 = \mathbf{R}^2 \times \{0\}$ は $(0, 0, \pm 1), \mathbf{x}, (p_\pm(\mathbf{x}), 0)$ が同一直線上にあることにより定義される。

(*) (暇な時に考える問題) stereographic projection は S^2 上の円を \mathbf{R}^2 の円または直線に写すことを示せ。