２００４年度幾何学特別演習 I 演習問題　　６月２１日

復習問題１. （１）$n \times n$ 行列 A の指数関数の定義を述べよ。
（２）$\mathbf{R}^n$ 上の常微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = Ax$ の解は行列の指数関数を使ってどのように書かれるか。
（３）この常微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = Ax$ に対応するベクトル場は、基底 $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ を使ってどのように書かれるか。
（４）ベクトル場が生成するフロー $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ はどのように書かれるか。

復習問題２. $\mu : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ を $\|\mathbf{x}\| < 1$ ならば $\mu(\mathbf{x}) > 0$ を満たし、$\mathrm{supp}\mu = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 \mid \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$ となる C^∞ 級関数とする。平面上のベクトル場 $\mu\dfrac{\partial}{\partial x_1}$ が生成するフロー Φ_t について、$\displaystyle\lim_{t\to\infty} \Phi_t(\mathbf{x}),\ \lim_{t\to-\infty} \Phi_t(\mathbf{x})$ を求めよ。

多様体 M の座標近傍系 $\{(U_i, \varphi_i)\}$ に対し、$g_{ij} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$ を座標変換とする。g_{ij} のヤコビ行列式がすべて正であるような座標近傍系が存在するとき多様体は向き付けを持つという。

演習問題１. 多様体 M の座標近傍系 (U_i, φ_i) に対し、$V_i = \varphi_i(U_i), V_{ji} = \varphi_i(U_i \cap U_j)$ として、$g_{ij} : V_{ij} \longrightarrow V_{ji}$ を座標変換とする。$V_{i_+} \sqcup V_{i_-}$ を２つの V_i の disjoint union として、

$$V_{i_\sigma j_\tau} = \{x_j \in V_{j_\tau} \mid \mathrm{sign}(\det Dg_{ij}(x_j))\tau = \sigma\}$$

と定義する。但し、$\mathrm{sign}(\det Dg_{ij}(x_j))$ は行列式の符号（正負）である。
$V_{i_+ j_\tau} \cup V_{i_- j_\tau} = V_{ij} \subset V_{j_\tau}$ で、$V_{i_+ j_\tau}, V_{i_+ j_\tau}$ は V_{j_τ} の開集合である。$g_{i_\sigma j_\tau} : V_{i_\sigma j_\tau} \longrightarrow V_{j_\tau i_\sigma}$ を $g_{i_\sigma j_\tau} = g_{ij}|V_{i_\sigma j_\tau}$ とおく。このとき、$g_{j_\tau k_\delta}(V_{i_\sigma k_\delta} \cap V_{j_\tau k_\delta}) = V_{i_\sigma j_\tau} \cap V_{k_\delta j_\tau}$ であり、$V_{i_\sigma k_\delta} \cap V_{j_\tau k_\delta}$ 上で $g_{i_\sigma j_\tau}\, g_{j_\tau k_\delta} = g_{i_\sigma k_\delta}$ が成立する。$\displaystyle\bigsqcup_{i,\sigma} V_{i_\sigma}$ 上の同値関係を、

$$V_{j_\tau} \ni x_{j_\tau} \sim x_{i_\sigma} \in V_{i_\sigma} \Longleftrightarrow g_{i_\sigma j_\tau}(x_{j_\tau}) = x_{i_\sigma}$$

で定義する。商空間 $\widehat{M} = \displaystyle\bigsqcup_{i,\sigma} V_{i_\sigma}/\sim$ に対し、$M \cong \displaystyle\bigsqcup_{i} V_i/\sim$ への写像 $P : \widehat{M} \longrightarrow M$ が得られる。
(1) $\widehat{M}$ は n 次元多様体となることを示せ。
(2) $\widehat{M}$ は常に向き付けを持つ多様体であることを示せ。
(3) $\widehat{M} \cong M \times \{\pm 1\}$ となり、$P = \mathrm{proj}_1$ となることと、M が向き付け可能であることは同値であることを示せ。
(4) M が向き付けを持たない連結な多様体とするとき、$\widehat{M}$ は連結な多様体となり、$P : \widehat{M} \longrightarrow M$ において、$P^{-1}(y)$ $(y \in M)$ の２点を入れ替える写像 $F : \widehat{M} \longrightarrow \widehat{M}$ は、向き付けを反対にする微分同相写像となることを示せ。

演習問題２. 連結コンパクト１次元多様体 M 上には、向きを定めることが出来る。(座標変換の微分が正に取れる。）このことを使って M 上に 0 にならないベクトル場が存在することを示し、M は $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ と微分同相であることを示せ。