サードの定理の証明の概略。 Milnor: Topology from the differentiable viewpoint, 足立正久：「埋め込みとはめ込み」による。

(0)　$A \subset \mathbf{R}^n$ が測度 0 であるとは、任意の正実数 ε に対し、次を満たす閉立方体の可算族 Q_i があること: $A \subset \bigcup_i Q_i$, Q_i の辺の長さを δ_i とするとき、$\sum_i {\delta_i}^n \leqq \varepsilon$ となる。

(1)　$\mathbf{R}^n$ の測度 0 の集合のリプシッツ同相写像による像は測度 0 である。従って、連続微分可能同相写像による像についても同様。

(2)　これにより、微分可能多様体の部分集合が測度 0 であることが定義される。また、サードの定理は、滑らかな写像 $F : \mathbf{R}^m \longrightarrow \mathbf{R}^n$ に対して示せばよい。

(3)　サードの定理は、$m < n$ に対して正しい。

(4)　F の臨界点の集合を C とする。$C = \{x \in \mathbf{R}^m \mid \mathrm{rank} T_x F < n\}$. F の k 階の偏微分がすべて 0 となる点の集合を C_k とする: $C \supset C_1 \supset C_2 \supset \cdots \supset C_k$.

(5)　フビニの定理「$A \cap \{x\} \times \mathbf{R}^{m-1} \subset \{x\} \times \mathbf{R}^{m-1}$ がすべての x に対し測度 0 ならば、$A \subset \mathbf{R}^m$ が測度 0 となる。」を認める。

(6)　「$F(C - C_1)$ は測度 0.」

$C - C_1$ の点 x の近傍で、$F = (f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, \dots, x_m))$ の偏微分の１つは 0 とならない。$\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} \neq 0$ のとき、座標の順序を入れ換えて、$\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} \neq 0$ とする。逆写像定理から、この近傍で、$h : (x_1, x_2, \dots, x_m) \longmapsto (f_1, x_2, \dots, x_m)$ は、局所微分同相。$F \circ h^{-1}$ は第 1 番目の座標が、恒等写像で、$F(C - C_1) = (F \circ h^{-1})(h(C - C_1))$ である。$F(C - C_1) \cap \{y_1\} \times \mathbf{R}^{n-1}$ $= (F \circ h^{-1})(h(C - C_1)) \cap \{y_1\} \times \mathbf{R}^{n-1} = (F \circ h^{-1})(h(C - C_1) \cap \{x_1\} \times \mathbf{R}^{m-1})$. ここで $h(C - C_1) \cap \{x_1\} \times \mathbf{R}^{m-1}$ が $F \circ h^{-1} | \{x_1\} \times \mathbf{R}^{m-1}$ の臨界点集合に含まれることがわかる。従って、低い次元のユークリッド空間の間の写像 $\mathbf{R}^{m-1} \longrightarrow \mathbf{R}^{n-1}$ に対して、サードの定理が示されていれば、(5) から (6) が従う。

(7)　「$k \geqq 1$ のとき、$F(C_k - C_{k+1})$ は測度 0.」

$C_k - C_{k+1}$ の点 x の近傍で、偏微分 $\dfrac{\partial^{k+1} f_i}{\partial x_{s_1} \partial x_{s_2} \cdots \partial x_{s_{k+1}}}$ は 0 でないが、$w(x) = \dfrac{\partial^{k+1} f_i}{\partial x_{s_2} \cdots \partial x_{s_{k+1}}}$ は 0 である。座標の順序を入れ換えて、$s_1 = 1$ とする。逆写像定理から、この近傍で、$h :$ $(x_1, x_2, \dots, x_m) \longmapsto (w, x_2, \dots, x_m)$ は局所微分同相。$h(C_k - C_{k+1}) \subset \{0\} \times \mathbf{R}^{m-1}$ であるが、$h(C_k - C_{k+1})$ は $F \circ h^{-1}$ を $\{0\} \times \mathbf{R}^{m-1}$ に制限した写像の臨界点の集合 (の C_k) に含まれる。従って、低い次元のユークリッド空間からの写像 $\mathbf{R}^{m-1} \longrightarrow \mathbf{R}^n$ に対して、サードの定理が示されていれば、(7) が従う。

(8)　「$(k+1)n > m$ ならば、$F(C_k)$ は測度 0.」

k 階偏微分がすべて 0 の点 x_0 の近傍の点 x_1 では、$\|F(x_1) - F(x_0)\| \leqq K \|x_1 - x_0\|^{k+1}$.

$[0,1]^m$ を M^m の立方体に等分すると, C_k と交わる小立方体は辺の長さが $(K\dfrac{1}{M})^{k+1}$ の M^m 個の立方体に含まれる。その体積 $K^{n(k+1)} \dfrac{M^m}{M^{n(k+1)}}$ は、$(k+1)n > m$ のとき、分割を細かくすれば 0 に収束する。

(9)　(3) により、帰納法 (6), (7) が成立している。

モース関数の存在。(1)　ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ 上の関数 f を考える。$(a_1,\dots,a_n)$ に対し、$L(x_1,\dots,x_n)=\sum_i a_ix_i$ と置く。$f-L:\mathbf{R}^n\longrightarrow\mathbf{R}$ を考えると、$f-L$ の臨界点 x は $T_xf=L$ となる x である。$f-L$ の臨界点 x におけるヘッセ行列は $(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j})$ である。$f-L$ が退化するヘッセ行列をもつことは、$T_xf=L$ となる x で行列 $(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j})$ が定義する線形写像が全射でないことである。行列 $(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j})$ は写像 $(x_1,\dots,x_n)\longmapsto(\dfrac{\partial f}{\partial x_1},\dots,\dfrac{\partial f}{\partial x_n})$ のヤコビ行列だから、L は写像 $(x_1,\dots,x_n)\longmapsto(\dfrac{\partial f}{\partial x_1},\dots,\dfrac{\partial f}{\partial x_n})$ の臨界値である。
サードの定理から、臨界値は測度0で、十分小さい L について、$f-L$ はモース関数となる。
(2)　モース関数に2階微分まで近い関数はモース関数である。
(3)　コンパクト多様体 M 上の任意の関数 F を考える。座標近傍による有限被覆 U_i を取り、$V_i\subset\overline{V_i}\subset U_i$ で、$\{V_i\}$ が M の被覆となるものをとる。また、V_i 上 1, $M-U_i$ 上 0 となる関数 μ_i を取る。
(3)-1　$F|U_1$ に対し、f_1 を $F|U_1$ を近似する U_1 上のモース関数とすると、$F_1=\mu_1f_1+(1-\mu_1)F$ は V_1 上でモース関数。
(3)-2　$F_1|U_2$ に対し、f_2 を $F_1|U_2$ を近似する U_2 上のモース関数とすると、$F_2=\mu_2f_2+(1-\mu_2)F_1$ は、V_2 上でモース関数だが、V_1 上でも F_1 を十分近似していればモース関数。
(3)-k　同様に、$F_{k-1}|U_k$ に対し、f_k を $F_{k-1}|U_k$ を近似する U_k 上のモース関数とすると、$\mu_kf_k+(1-\mu_{k-1})F_{k-1}$ は、V_k 上でモース関数だが、$V_1\cup\cdots\cup V_{k-1}$ 上でも F_{k-1} を十分近似していればモース関数。

モースの補題。
$(0,\dots,0)$ を f の臨界点、$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(0,\dots,0)$ は非退化とする。線形変換で $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(0,\dots,0)$ は対角化されているとする。（少なくとも $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_1}(0,\dots,0)\neq0$ とする。）
前に復習の問題として出した表示 $f=x_1g_1+\cdots+x_ng_n$ について、$g_i(0,\dots,0)=0$ だから、$g_i=x_1h_{i1}+\cdots+x_nh_{in}$ と書かれる。このとき、$h_{ii}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(0,\dots,0)\neq0.$
$f=\sum_{i,j=1}^n h_{ij}x_ix_j$ について順に平方完成を行う。h_{ij} を $\dfrac{h_{ij}+hji}{2}$ におきかえて、$h_{ij}=h_{ji}$ としてよい。h_{11} は $(0,\dots,0)$ の近傍で 0 でないから、
$f=h_{11}(x_1+\dfrac{h_{12}}{2h_{11}}x_2+\cdots+\dfrac{h_{1n}}{2h_{11}}x_n)^2+\displaystyle\sum_{i,j=2}^n h'_{ij}x_ix_j$ と変形される。
$y_1=\sqrt{|h_{11}|}(x_1+\dfrac{h_{12}}{2h_{11}}x_2+\cdots+\dfrac{h_{1n}}{2h_{11}}x_n)$ とおいて、$(x_1,x_2,\dots,x_n)\longmapsto(y_1,x_2,\dots,x_n)$ はヤコビ行列式が $\sqrt{|h_{11}|}$ だから局所微分同相である。これで座標変換すると、$f=\mathrm{sign}(h_{11})y_1^2+\sum_{i,j=2}^n h'_{ij}x_ix_j$ と書かれる。但し、h'_{ij} は $(y_1,x_2,\dots,x_n)$ の関数の形に書き換わっている。
引き続き、$\sum_{i,j=2}^n h'_{ij}x_ix_j$ について、$x_2,\dots,x_n$ についての線形変換で $h'_{22}(0,\dots,0)\neq0$ とする。$h'_{22}(0,\dots,0)\neq0$ だから、平方完成を行って、$y_2=\sqrt{|h'_{22}|}(x_2+\dfrac{h'_{23}}{2h'_{22}}x_3+\cdots+\dfrac{h'_{2n}}{2h'_{22}}x_n)$ を使って座標変換すると、$f=\mathrm{sign}(h_{11})y_1^2+\mathrm{sign}(h'_{22})y_2^2+\sum_{i,j=3}^n h''_{ij}x_ix_j$ となる。以下同様。