２００４年度幾何学Ｉ　試験問題

２００４年9月１３日　１３：３０－１６：３０

問題１．　３次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ の部分空間について考える。

$A = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid \dfrac{1}{xyz}$ は整数 $\}$ は $\mathbf{R}^3$ の２次元部分多様体かどうか論ぜよ。

問題２．　３次元ユークリッド空間に埋め込まれた次で定義される２次元トーラス T^2 を考える。

$$T^2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 - 1 = 0\}$$

T^2 上の同値関係 $\sim$ を次のように定義する。

$$(x_1, y_1, z_1) \sim (x_2, y_2, z_2) \Longleftrightarrow (x_1, y_1, z_1) = \pm(x_2, y_2, z_2)$$

$p : T^2 \longrightarrow T^2/\sim$ を商空間への射影とする。

(1)　$T^2/\sim$ は２次元多様体であることを示せ。

(2)　$T^2/\sim$ は向き付け可能であるかどうか論ぜよ。

問題３．　３次元ユークリッド空間の単位球面 S^2 を考える。

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

S^2 には３次元ユークリッド空間の計量から自然に定まるリーマン計量 $g = g_{S^2}$ を考える。単位球面の極座標を用いて次の写像を定義する。

$$F : (-\pi, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \longrightarrow S^2$$
$$F(\theta, \varphi) = (\cos\theta\cos\varphi, \sin\theta\cos\varphi, \sin\varphi)$$

(1)　次の行列を計算せよ。

$$\begin{pmatrix} g(F_*(\frac{\partial}{\partial\theta}), F_*(\frac{\partial}{\partial\theta})) & g(F_*(\frac{\partial}{\partial\theta}), F_*(\frac{\partial}{\partial\varphi})) \\ g(F_*(\frac{\partial}{\partial\varphi}), F_*(\frac{\partial}{\partial\theta})) & g(F_*(\frac{\partial}{\partial\varphi}), F_*(\frac{\partial}{\partial\varphi})) \end{pmatrix}$$

(2)　S^2 上の関数 $f : S^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ に対し、勾配ベクトル場 $\mathrm{grad} f$ は、点 $p \in S^2$ における任意の接ベクトル $X \in T_pS^2$ に対し、$g(\mathrm{grad} f_{(p)}, X) = X(f)$ となるものとして定義される。

S^2 上の関数 $z : S^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ に対し、$\mathrm{grad} z$ を計算せよ。

($\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}$ または $\dfrac{\partial}{\partial\theta}, \dfrac{\partial}{\partial\varphi}$ の一次結合としてあらわすこと。)

問題４．　次元が１以上の空でないコンパクト多様体 M 上の C^∞ 級関数全体のなすベクトル空間 $C^\infty(M)$ は無限次元であることを示せ。