# ２００４年度幾何学Ｉ　試験問題

２００４年9月１３日　１３：３０− １６：３０

問題１．　３次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ の部分空間について考える。

$A = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid \dfrac{1}{xyz}$は整数 $\}$ は $\mathbf{R}^3$ の 2 次元部分多様体かどうか論ぜよ。

問題２．　３次元ユークリッド空間に埋め込まれた次で定義される 2 次元トーラス $T^2$ を考える。

$$T^2 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid z^2 + (\sqrt{x^2+y^2} - 2)^2 - 1 = 0\}$$

$T^2$ 上の同値関係 $\sim$ を次のように定義する。

$$(x_1,y_1,z_1) \sim (x_2,y_2,z_2) \Longleftrightarrow (x_1,y_1,z_1) = \pm(x_2,y_2,z_2)$$

$p : T^2 \longrightarrow T^2/\sim$ を商空間への射影とする。

(1)　$T^2/\sim$ は 2 次元多様体であることを示せ。

(2)　$T^2/\sim$ は向き付け可能であるかどうか論ぜよ。

問題３．　３次元ユークリッド空間の単位球面 $S^2$ を考える。

$$S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

$S^2$ には 3 次元ユークリッド空間の計量から自然に定まるリーマン計量 $g = g_{S^2}$ を考える。単位球面の極座標を用いて次の写像を定義する。

$$F : (-\pi,\pi) \times (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \longrightarrow S^2$$
$$F(\theta,\varphi) = (\cos\theta\cos\varphi, \sin\theta\cos\varphi, \sin\varphi)$$

(1)　次の行列を計算せよ。

$$\begin{pmatrix} g(F_*(\frac{\partial}{\partial\theta}), F_*(\frac{\partial}{\partial\theta})) & g(F_*(\frac{\partial}{\partial\theta}), F_*(\frac{\partial}{\partial\varphi})) \\ g(F_*(\frac{\partial}{\partial\varphi}), F_*(\frac{\partial}{\partial\theta})) & g(F_*(\frac{\partial}{\partial\varphi}), F_*(\frac{\partial}{\partial\varphi})) \end{pmatrix}$$

(2)　$S^2$ 上の関数 $f : S^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ に対し、勾配ベクトル場 $\mathrm{grad}f$ は、点 $p \in S^2$ における任意の接ベクトル $X \in T_pS^2$ に対し、$g(\mathrm{grad}f_{(p)}, X) = X(f)$ となるものとして定義される。

$S^2$ 上の関数 $z : S^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ に対し、$\mathrm{grad}z$ を計算せよ。

$(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}$ または $\dfrac{\partial}{\partial\theta}, \dfrac{\partial}{\partial\varphi}$ の一次結合としてあらわすこと。）

問題４．　次元が 1 以上の空でないコンパクト多様体 $M$ 上の $C^\infty$ 級関数全体のなすベクトル空間 $C^\infty(M)$ は無限次元であることを示せ。