２００４年度幾何学Ｉ　追試験問題

２００４年１２月６日　１５：３０－１８：３０

問題１．　３次元ユークリッド空間の部分集合 T^2 を次で定義する。

$$T^2 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid z^2 + (\sqrt{x^2+y^2} - 2)^2 = 1\}$$

(1)　T^2 は多様体であることを示せ。

(2)　実数 θ に対し、$\mathbf{R}^3$ 上の関数 $f_\theta(x,y,z) = x\cos\theta + z\sin\theta$ を考える。
これを T^2 に制限した関数 $F_\theta = f_\theta|T^2 : T^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ の臨界点、臨界値を求めよ。

問題２． (1)　多様体 M 上のフローの定義を述べよ。

(2)　コンパクトな多様体上のフローとベクトル場の関係を述べよ。

(3)　コンパクトな多様体上の自明でないフローの例をひとつ与えよ。

問題３．　多様体 M の部分多様体 L を考え、$i : L \longrightarrow M$ を包含写像とする。多様体 X から多様体 M への C^∞ 級写像 $F : X \longrightarrow M$ が L に横断的であるとは、任意の $x \in F^{-1}(L)$ に対し、

$$F_*(T_xX) + i_*(T_{F(x)}L) = T_{F(x)}M$$

が成立することである。

このとき、$F^{-1}(L) \subset X$ は X の部分多様体であることを示せ。

問題４． (1)　多様体のリーマン計量の定義を述べよ。

(2)　リーマン計量を持つ多様体 M 上の曲線の長さの定義を述べよ。

(3)　コンパクトなリーマン計量を持つ多様体の例をひとつ与えよ。