ユークリッド空間の多様体

定理。 R^n **の部分集合** M **について以下の性質が同値である。** $p+q=n$ **とする。**

- 陰関数表示
  すべての $\mathbf{x}^0 \in M$ に対し、ある近傍 U をとると、U 上で定義された C^∞ 級関数 $F: U \longrightarrow \mathbf{R}^q$ で、U 上でヤコビ行列 DF のランクが q であるようなものがあって、$C \cap U = \{\mathbf{x} \in U \mid F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}^0)\}$ となる。
- グラフ表示
  すべての $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in M$ に対し、ある近傍 U をとると、p 個の座標方向からなる p 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^p$ の点実数 $(x_{i_1}^0, \dots, x_{i_p}^0)$ の近傍 W 上で定義された残りの q 個の座標方向からなる q 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^q$ に値を持つ C^∞ 級写像 G が存在して $M \cap U = \{(x_{i_1}, \dots, x_{i_p}, G(x_{i_1}, \dots, x_{i_p})) \mid (x_{i_1}, \dots, x_{i_p}) \in W\}$ となる．但し、座標は $x_{i_1}, \dots, x_{i_p}$, 残りの q 個の座標からなる $\mathbf{R}^q$ の順に並べ替えたと考える。
- パラメータ表示
  すべての $\mathbf{x}^0 \in M$ とその近傍 U に対し、U に含まれる近傍 V をとると、p 次元ユークリッド空間の開球 W 上で定義された V に値を持つ C^∞ 級の単射 $\Phi: W \longrightarrow V$ で, すべての $\mathbf{u} \in W$ に対し $D\Phi$ のランクは p であり、$M \cap V = \{\Phi(\mathbf{u}) \mid \mathbf{u} \in W\}$ となる。

証明　グラフ表示が与えられたとき、陰関数は $(x_{j_1}, \dots, x_{j_q})$ をのこりの q 個の座標として、写像 $F: (x_1, \dots, x_n) \longmapsto (x_{j_1}, \dots, x_{j_q}) - G(x_{i_1}, \dots, x_{i_p}) \in \mathbf{R}^q$ を考えると、$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_{j_1}}{\partial x_{j_1}} & \cdots & \dfrac{\partial f_{j_1}}{\partial x_{j_q}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_{j_q}}{\partial x_{j_1}} & \cdots & \dfrac{\partial f_{j_q}}{\partial x_{j_q}} \end{pmatrix}$ は単位行列で、DF のランクは q かつ $M \cap U = F^{-1}(F(\mathbf{x}^0)) = F^{-1}(0)$ となる。

　グラフ表示自体が特殊なパラメータ表示で、

$$\Phi(x_{i_1}, \dots, x_{i_p}) = (x_{i_1}, \dots, x_{i_p}, G(x_{i_1}, \dots, x_{i_p}))$$

としたものである。$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi_{i_1}}{\partial x_{i_1}} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_{i_1}}{\partial x_{i_p}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial \varphi_{i_p}}{\partial x_{i_1}} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_{i_p}}{\partial x_{i_p}} \end{pmatrix}$ 単位行列で、$D\Phi$ のランクは p かつ $M \cap U = \{\Phi(\mathbf{u}) \mid \mathbf{u} \in W\}$ となる。

陰関数表示が与えられとき、グラフ表示ができることは陰関数定理による。

最後に、パラメータ表示が与えられたとき、n 行 p 列の行列 $D\Phi = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial u_p} \end{pmatrix}$ のランクは p である。このとき、座標 $x_1, \ldots, x_n$ の順序を入れ替えて、$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial \varphi_p}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_p}{\partial u_p} \end{pmatrix}$ が、可逆であるとして良い。$\varphi(\mathbf{u}^0) = \mathbf{x}^0$, $\Phi_1(\mathbf{u}) = (\varphi_1(\mathbf{u}), \ldots, \varphi_p(\mathbf{u}))$ とすると、逆写像定理により、$(\varphi_1(\mathbf{u}^0), \ldots, \varphi_p(\mathbf{u}^0))$ の近傍 W_1 から、W に値を持つ C^∞ 級写像 H が存在し、$H \circ \Phi = \mathrm{id}_{H(W_1)}$, $\Phi \circ H = \mathrm{id}_{W_1}$ を満たしている。$\mathbf{x}_1 = (x_1, \ldots, x_p)$, $\Phi_2(\mathbf{u}) = (\varphi_{p+1}(\mathbf{u}), \ldots, \varphi_{p+q}(\mathbf{u}))$ $(p+q=n)$ として、

$$\Phi(H(\mathbf{x}_1)) = (\Phi_1(H(\mathbf{x}_1)), \Phi_2(H(\mathbf{x}_1))) = (\mathbf{x}_1, \Phi_2(H(\mathbf{x}_1)))$$

を得る。従って、$(W_1 \times \mathbf{R}^q) \cap V$ において、グラフ表示を得る。

この定理の仮定を満たす図形をユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ の次元 p(余次元 q) 部分多様体と呼ぶ。

パラメータ表示は次の形でも良い。

> すべての $\mathbf{x}^0 \in M$ に対し、ある近傍 U をとると、p 次元ユークリッド空間の開集合 W 上で定義された U に値を持つ C^∞ 級の単射 $\Phi : W \longrightarrow U$ で, すべての $\mathbf{u} \in W$ に対し $D\Phi$ のランクは p であり、$\mathbf{u}_0 = \Phi^{-1}(\mathbf{x}_0)$ の任意の近傍 W' に対し、$\mathbf{x}^0 \in M$ の近傍 U' をとると、$M \cap U' = \{\Phi(\mathbf{u}) \mid \mathbf{u} \in W'\}$ となる。