講義の概要

まず、ユークリッド空間の中の多様体について説明をする。ここで、ベクトル解析で学んでいるであろう逆写像定理、陰関数定理を一般の次元のユークリッド空間の間の写像について述べ、証明する。ユークリッド空間の中の多様体に対して、各点のまわりでの記述は、多様体の次元と同じ次元の座標で記述される。この座標を多様体全体の上に広げることは出来ない。しかし、このような局所座標の存在が、多様体上の関数に対して解析を行うには十分である。このことを念頭において、多様体の定義が与えられる。各点が座標近傍をもつ位相空間で、座標変換が無限回微分可能であるものとして定義するのであるが、位相空間がハウスドルフであることも要請する。これは、もともとユークリッド空間の部分空間をモデルとして出発したことの名残であり、また関数の値によって点を区別するための条件でもある。

一旦、多様体が定義されると、多様体の研究は、多様体から多様体への写像を研究することにより行われる。多様体から多様体への写像の微分はどこにあるかを考えることから、多様体の接空間、それら全体のなす接束が定義される。もともと、ユークリッド空間の開集合からユークリッド空間への微分可能な写像に対しては、そのヤコビ行列が定義されていた。ユークリッド空間の中の多様体の間の写像に対しては、ユークリッド空間の中の多様体上の各点での接空間が定義され、接空間から接空間への線形写像と理解される。多様体には、各点の接空間を新たに定義する必要がある。実際には、多様体から多様体への写像の微分は、接空間から接空間への線形写像ととして定義されることになる。こうして、微分のある場所が特定されて、多様体を研究できることになる。

多様体上の議論がうまくいった最大のポイントのひとつは、多様体上に、１つの座標近傍の上だけに台を持つ無限回微分可能な関数が存在することである。このことから、多様体は再びユークリッド空間に埋め込まれることとなる。ここで、ひとつの輪が閉じることになる。実は、多様体としては、ユークリッド空間の中の多様体だけを考えれば十分であったということになるわけであるが、一般的な議論が無駄になったわけではない。ユークリッド空間の部分空間であるという不必要な仮定を排除できたということである。例えば、空間上の同値関係

の商空間として多様体を与えることが、自然に定式化されているのである。

また、多様体の間の写像を考えると、１点の逆像が多様体となることが多いことがわかる。これは、サードの定理の結果である。特に、ユークリッド空間上で方程式（系）により定義される部分集合は、多様体となることが多い。このような多様体のから多様体への写像を使って、多様体の形を明らかにしていくことが出来る。もっとも、良く知られているのが、モース理論である。

多様体の部分集合を比べるためにはどうすれば良いかという問題は、多様体からそれ自身への微分同相写像を考えることによって解決される。微分同相写像で写りあうものを同じと考えることが出来る。多様体の部分集合の移動を考えるためには、微分同相写像の連続な族を考えることになるが、これは、多様体上の常微分方程式論すなわちベクトル場の理論によって、解決される。特にコンパクトな多様体では、ベクトル場とフローとが１対１に対応している。

こうして得られた多様体上には、実は大きさの概念がほとんどない。ほとんど全体を覆い尽くす開集合と１点の近傍は多様体上では、まだ区別されていない。このような区別を与えるためには曲線に長さを定義できれば良いことがわかっている。曲線に長さを与えるためには接ベクトルに長さを定義してその積分とすれば良く、リーマン計量という形で定義される。