２０１７年度幾何学特別演習Ｉ演習問題　　４月５日

復習問題１． ２変数関数 $f(x,y)$ についての陰関数定理、平面から平面への写像についての逆写像定理を述べよ。

復習問題２． a, b, c を ± 1 とするとき、$ax^2+by^2+cz^2=1$ の概形を描け。

演習問題１（チェイン ルール）． $f:\boldsymbol{R}^m \longrightarrow \boldsymbol{R}^n,\ g:\boldsymbol{R}^\ell \longrightarrow \boldsymbol{R}^m$ をともに連続微分可能な写像とする。すなわち、$f(\boldsymbol{y}) = (f_1(y_1,\ldots,y_m),\ldots,f_n(y_1,\ldots,y_m)),\ g(\boldsymbol{x}) = (g_1(x_1,\ldots,x_\ell),\ldots,g_m(x_1,\ldots,x_\ell))$ の各成分が連続微分可能とする。f, g のヤコビ行列は $Df = (\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j})_{i=1,\ldots,n;j=1,\ldots,m}$, $Dg = (\dfrac{\partial g_j}{\partial x_k})_{j=1,\ldots,m;k=1,\ldots,\ell}$ である。この時、合成写像 $f\circ g:\boldsymbol{R}^\ell \longrightarrow \boldsymbol{R}^n$ も連続微分可能な写像であることを示し、$f\circ g$ のヤコビ行列 $D(f\circ g)$ について $D(f\circ g)(x) = Df(g(x))Dg(x)$ を示せ。

演習問題２（C^1 ならば局所リプシッツ）． $\boldsymbol{R}^n$ の開集合 U 上で定義された C^1 級写像 $G:U\longrightarrow \boldsymbol{R}^m$, $G(\boldsymbol{x}) = (g_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,g_m(x_1,\ldots,x_n))$ が U に含まれる凸な閉集合 A 上で $\left|\dfrac{\partial g_i}{\partial x_j}\right| \leqq K$ を満たすとする．このとき，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{v}\in A$ に対し，$\|G(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{v})-G(\boldsymbol{x})\| \leqq \sqrt{mn}K\|\boldsymbol{v}\|$ となることを示せ．

演習問題３． ３次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^3$ 内の点 $P_1, ..., P_k$ と、それらの中の２点を結ぶ線分 $C_1 = \overline{P_{i_1}P_{j_1}}, \ldots, C_m = \overline{P_{i_m}P_{j_m}}$ が与えられているとする。これらの線分はお互いに端点以外では交わらず、$\{P_1,\ldots,P_k\}$ と両端のみで交わるとする。(すべて $\boldsymbol{R}^3$ の部分集合と考える。) $\{P_1,\ldots,P_k\}$ とこれらの線分の和集合 X が、部分空間としての位相について１次元位相多様体となるための条件は何か。このとき、線分の個数と点の個数との間にはどのような関係があるか。

余裕があれば、$P_1, ..., P_k$ の中の２点を結ぶ線分 $C_1 = \overline{P_{i_1}P_{j_1}}, \ldots, C_m = \overline{P_{i_m}P_{j_m}}$ と、３点を頂点とする三角形 $T_1 = \triangle P_{u_1}P_{v_1}P_{w_1}, \ldots, T_\ell = \triangle P_{u_\ell}P_{v_\ell}P_{w_\ell}$ が与えられ、これらの三角形の辺は、$C_1,\ldots,C_m$ のどれかであり、三角形の内部と線分や $\{P_1,\ldots,P_k\}$ は交わらないとする。また、線分はお互いに端点以外では交わらず、$\{P_1,\ldots,P_k\}$ と両端のみで交わるとする。$\{P_1,\ldots,P_k\}$、線分、三角形の和集合 Y が部分空間としての位相について２次元位相多様体となるための条件を考えてみよ。

演習問題４．

(1)　$f:\boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R}$ を $f(x,y) = x^3-x+y^2$ で定義するとき、f のヤコビ行列を求めよ。

(2)　(1) の f について、$z\in\boldsymbol{R}$ の逆像 $f^{-1}(z)$ の各成分が滑らかな曲線となるための z の条件を求めよ。

(3)　$F:\boldsymbol{R}^3 \longrightarrow \boldsymbol{R}^2$ を $F(x,y,z) = (x^3-zx+y^2, z)$ で定義するとき、F のヤコビ行列を求めよ。

(4)　(3) の F について、$(s,t)\in\boldsymbol{R}^2$ の逆像 $F^{-1}(s,t)$ の各成分が、滑らかな曲線となるための (s,t) の条件を求めよ。

但し、$\boldsymbol{R}^n$ の滑らかな曲線 C とは、C の各点 x に対し、x の近傍 U と C^∞ 級写像 $f:U\longrightarrow\boldsymbol{R}^{n-1}$ で、U 上で $\mathrm{rank}Df = n-1$, $U\cap C = f^{-1}(f(x))$ とするものがあることである。（１次元部分多様体であること）