

復習問題 1.  $C^r$  級関数  $f(x)$  に対するテーラーの定理を  $f(x) - \sum_{k=0}^{r-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = R_r(x)$

とするとき、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{R_r(x)}{x^r} = \frac{f^{(r)}(0)}{r!}$  と理解することにする。

(1)  $C^\infty$  級関数  $f(x)$  に対し、 $r-1$  次多項式  $P(x)$  が  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x) - P(x)|}{x^{r-1}} = 0$  を満たすならば、 $P(x) = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$  となることを示せ。

(2)  $C^\infty$  級関数  $f(x), g(x)$  に対し、多項式  $P(x), Q(x)$  が  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x) - P(x)|}{x^{r-1}} = 0$ ,

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|g(x) - Q(x)|}{x^{r-1}} = 0$  を満たし、 $g(0) = 0$  とすると、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|(f \circ g)(x) - (P \circ Q)(x)|}{x^{r-1}} = 0$  となることを示せ。

(\*) (1), (2) を  $C^\infty$  級関数  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $C^\infty$  級写像  $g: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n$  に対し、拡張せよ。

復習問題 2.  $X: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  をリプシッツ連続写像とする。 $n$  次元実ベクトル空間上の常微分方程式  $\frac{d}{dt} \mathbf{x} = X(\mathbf{x})$  の解  $F(t, \mathbf{x})$  ( $F(0, \mathbf{x}) = \mathbf{x}$ ) は初期値  $\mathbf{x}$  に対し、リプシッツ連続であることを示せ。

演習問題 1.  $S^{2n+1} = \{(z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbf{C}^{n+1} \mid \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|^2 = 1\}$  を  $\mathbf{C}^{n+1}$  の単位球面

とする。 $U(1) = \{e^{\sqrt{-1}\theta} \mid \theta \in \mathbf{R}\}$  とする。

$U(1) \times S^{2n+1} \rightarrow S^{2n+1}$  を

$(e^{\sqrt{-1}\theta}, (z_1, \dots, z_{n+1})) \mapsto (e^{\sqrt{-1}\theta} z_1, \dots, e^{\sqrt{-1}\theta} z_{n+1})$  で定義すると、これは群  $U(1)$  の  $S^{2n+1}$  への作用であることを示せ。

演習問題 2.  $\mathbf{C}P^n = (\mathbf{C}^{n+1} - \{0\})/\mathbf{C}^\times$  を  $n$  次元複素射影空間とすると、 $\mathbf{C}P^n$  は実  $2n$  次元  $C^\infty$  級多様体である。

(1) 結合写像  $S^{2n+1} \xrightarrow{i} \mathbf{C}^{n+1} \setminus \{0\} \xrightarrow{p} \mathbf{C}P^n$  の rank を求めよ。

ヒント:  $T_z S^{2n+1} \rightarrow T_{(p \circ i)(z)} \mathbf{C}P^n$  が全射であることを  $\mathbf{C}P^n$  上の  $C^\infty$  級曲線が、 $S^{2n+1}$  上の  $C^\infty$  級曲線の像になることを示して、示す。

(2)  $f(z_1, \dots, z_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} k|z_k|^2 / \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|^2$  で定義される関数  $f: \mathbf{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R}$

は  $\mathbf{C}P^n$  上の  $C^\infty$  級関数  $F$  を誘導することを示せ。

(3)  $F$  の臨界点 ( $F_*: T_x \mathbf{C}P^n \rightarrow \mathbf{R}$  が 0 となる点  $x$ ) を求めよ。

ヒント: 合成写像  $T_z S^{2n+1} \rightarrow T_x \mathbf{C}P^n \rightarrow \mathbf{R}$  が 0 でない点  $z$  の定める点  $x = [z]$  は正則点である。

(4)  $F$  の臨界点におけるヘッセ行列を求めよ。

ヒント: 復習問題 1。